Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:
Die Standard-**Cantormenge** ist definiert als

$$C := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ erfüllt } a_n \in \{0,\ 2\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie: C ist überabzählbar.

Lösung:
Es gibt überabzählbar viele unendliche Folgen in $\{0,2\}^{\mathbb{N}_0}$. Wenn

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

dann ist

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} \neq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n},$$

denn wenn k die erste Stelle ist, an der sich a und b unterscheiden, dann ist

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n} \right| \geq 3^{-k} - \sum_{n>k} 2\cdot 3^{-n} > 0.$$

b) Zeigen Sie: C ist homöomorph zum **Cantor-Staub** $C \times C$. (Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion zwischen ihnen mit stetiger Umkehrabbildung gibt.)

Lösung:
Die Abbildung

$$f\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} \right) := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{2n} 3^{-2n}, \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{2n+1} 3^{-(2n+1)} \right)$$

ist bijektiv, da

$$f^{-1}\left(\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}, \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n} \right) \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n 3^{-n}$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} \text{ für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} \text{ für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

f ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < 2\varepsilon$ und wähle

$$0 < \delta < 3^{-2k} - \sum_{n>2k} 2\cdot 3^{-n} > 0.$$

Dann gilt für

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n},\ y = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n}$$

mit $|x-y| < \delta$, dass die ersten $2k$ Stellen von x und y übereinstimmen. Somit ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_{2n} - b_{2n}) 3^{-2n} \right| + \left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_{2n+1} - b_{2n+1}) 3^{-(2n+1)} \right| \\ &= \left| \sum_{n>k} (a_{2n} - b_{2n}) 3^{-2n} \right| + \left| \sum_{n>k} (a_{2n+1} - b_{2n+1}) 3^{-(2n+1)} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

f^{-1} ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < \varepsilon$ und wähle

$$0 < \delta < 3^{-k} - \sum_{n>k} 2 \cdot 3^{-n} > 0.$$

Dann gilt für

$$x = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n} \right),\ y = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a'_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b'_n 3^{-n} \right)$$

mit $|x-y| < \delta$ in der Summennorm, dass die ersten k Stellen von x und y in beiden Koordinaten übereinstimmen. Somit ist

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |c_n - c'_n| 3^{-n} < \sum_{n>k} |c_n - c'_n| 3^{-n} < \varepsilon.$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} \text{ für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} \text{ für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$c'_n = \begin{cases} a'_{n/2} \text{ für } n \text{ gerade} \\ b'_{(n-1)/2} \text{ für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 2:
a) Die **Twistabbildung** auf dem Torus ist $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $f([(x,y)]) = [(x, y + \theta(x))]$, wobei $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\theta(0) - \theta(1) \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Für jede solche Funktion θ ist f volumenerhaltend.

Lösung:
Für differenzierbare Funktionen θ ist das klar, da

$$\det Df = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d\theta}{dx} & 1 \end{pmatrix} \equiv 1.$$

Es gilt aber auch für beliebige Funktionen θ, da das Volumenelement auf dem Torus gleich dem Volumenelement $d\mathrm{vol} = dxdy$ im $\mathbb{R}^2$ ist und daher

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(f(A)) &= \int_{x\in[0,1)} \int_{y\in[0,1),(x,y)\in f(A)} dydx \\ &= \int_{x\in[0,1)} \int_{y\in[0,1),(x,y-\theta)\in A} dydx \\ &= \int_{x\in[0,1)} \int_{y\in[0,1),(x,y)\in A} dydx \\ &= \mathrm{vol}(A). \end{aligned}$$

□

b) Sei eine Abbildung $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definiert durch $f([(x,y)]) = [(x, y+\theta(y))]$ mit $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\theta(0) - \theta(1) \in \mathbb{Z}$. Ist die Abbildung f notwendigerweise volumenerhaltend (Beweis oder Gegenbeispiel)?

Lösung: Die Abbildung ist im Allgemeinen nicht volumenerhaltend. Denn es gilt

$$\det Df = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix},$$

was z.B. für $\theta(y) = \cos(2\pi y)^2$ nicht $\equiv 1$ ist. □

Aufgabe 3:
a) Das Vektorfeld $f(v)$ definiere auf $\mathbb{R}^2$ einen für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definierten Fluss φ, so dass $\varphi_t(v_0) = v(t)$ für die Lösung v der Gleichung $\dot{v} = f(v)$, $v(0) = v_0$ gelte.

Zeigen Sie: Wenn $f(x,y) = (g(y), h(x))$, wobei $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, dann ist φ_t volumenerhaltend. Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{div} f = 0$.

Lösung: $\mathrm{div} f = 0$ läßt sich sofort nachrechnen. □

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist der durch das Vektorfeld

$$f(x,y) = (ax + \sin(y^{10} \cdot (\cos(y^6))^{2010} e^{-y}), by + \cos(x^{42} \sin(x^{24}) e^{e^{-x}})$$

bestimmte Fluss volumenerhaltend?

Lösung: $\mathrm{div} f = a + b$; dies ist genau für $a = -b$ Null, unabhängig von x, y.

Aufgabe 4:
Sei X ein beliebiger endlicher Raum, bestehend aus $N > 1$ Punkten, versehen mit der Topologie, in der alle Teilmengen von X offen sind (die "feinste Topologie"; sie wird erzeugt durch die diskrete Metrik $d(x,y) = 1$ für alle $x \neq y$).

a) Geben Sie ein Beispiel einer topologisch transitiven Abbildung $f : X \to X$ an.

Lösung: Jede Permutation, die nur aus einem Zykel besteht, hat den ganzen Raum als Orbit (und somit ein dichtes Orbit). □

b) Bestimmen Sie die Zahl $T(N)$ aller topologisch transitiven Abbildungen $f : X \to X$.

Lösung: Es gibt zwei leicht verschiedene Definitionen von topologisch transitiv; manchmal wird in der Literatur Homöomorphie (somit Bijektivität) gefordert, aber natürlich kann man die Definition auch ohne Bijektivität formulieren. Die Antworten auf die Frage ändern sich ein wenig mit der Definition.

Zunächst sei Bijektivität vorausgesetzt. Dann ist f eine zyklische Permutation.

Wenn die Permutation nur einen Zykel haben soll, gibt es für $N > 1$ genau $N - 1$ mögliche Werte unter f vom ersten Element x_1 (denn $f(x_1) = x_1$ würde auch ein Zykel sein). Die restlichen $n - 1$ Elemente werden auch zyklisch permutiert, somit ergibt sich per Induktion

$$T(N) = (N - 1)!.$$

Für $N = 1$ stimmt die Formel auch.

Wenn in der Definition von topologischer Transitivität keine Bijektivität gefordert ist, darf es (höchstens) einen Punkt mit zwei Urbildern geben. Es ergibt sich

$$T(N) = N! + (N - 1)!$$

für $N \geq 2$ und $T(1) = 1$.

Für $N = 0$ (d.h. $X = \emptyset$) gilt je nach Auslegung der Definition entweder $T(0) = 0$ (es gibt kein dichtes Orbit) oder $T(0) = 1$ (jedes Orbit ist dicht).

c) Gibt es eine topologisch mischende Abbildung auf X? (Beispiel oder Gegenbeweis)

Lösung: Nein für $N > 1$, denn dann gibt es $p \in X$, $p \neq q \in X$. Es sind $U = \{x\}$ und $V = \{y\}$ offene Mengen in X. Da f eine Permutation und somit periodisch ist, gibt es beliebig große n, so dass $f^n(U) = U$, also $f^n(U) \cap V = \emptyset$.

Für $N = 1$ (und $N = 0$) sind die (übrigens eindeutig bestimmten) Abbildungen $f : X \to X$ topologisch mischend. □