Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1:
Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung auf dem 2-Torus

$$f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,$$
$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] \mapsto \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]$$

(genannt **Arnolds Katzen-Abbildung**) ist wohldefiniert, stetig, umkehrbar, und f_A^{-1} ist stetig.

Lösung:

A ist ganzzahlig, deswegen wird das Einheitsgitter in sich abgebildet. Wegen $|\det(A)| = 1$ ist die inverse Matrix auch ganzzahlig und bildet das Einheitsgitter auch in sich selbst ab. Damit lassen sich durch Interpolation alle Punkte des $\mathbb{R}^2$, somit des Torus, bijektiv auf sich abbilden.

Lineare Abbildungen (wie A und A^{-1}) sind natürlich glatt, also ist die Abbildung f_A ein Homöomorphismus und sogar ein Diffeomorphismus.

b) Zeigen Sie: f_A ist nicht periodisch, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so dass $(f_A)^n =$id.

Lösung:

A hat einen Eigenwert λ mit $|\lambda| \neq 1$ (damit gilt das sogar für beide Eigenwerte). Somit gilt für einen Eigenvektor v, dass $||A^n v|| = |\lambda|^n ||v|| \neq ||v||$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. $\square$

c) Sei

$$G_q := \left\{ \left[\begin{pmatrix} a/q \\ b/q \end{pmatrix}\right] \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

das $q \times q$-Gitter auf dem 2-Torus ($q \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Für jedes $q \in \mathbb{N}$ ist die Einschränkung von f_A auf das Gitter G_q periodisch, d.h. es gibt es ein $n = n(q)$, so dass gilt:

$$\left(f_A|_{G_q}\right)^n = \text{id}.$$

Finden Sie eine obere Schranke für $n(100)$.

Lösung:

G_q ist eine endliche Menge, somit jede Abbildung $G_q \to G_q$ präperiodisch. $f_A|_{G_q}$ ist invertierbar, also periodisch. $\square$

Wegen der Invertierbarkeit ist $n(100) \leq 10000!$ (Zahl der Permutationen von G_{100}).

Bemerkung: Die wirkliche Periode ist überraschend klein, in der Größenordnung von q.

Aufgabe 2:
Konstruieren Sie einen kompakten metrischen Raum und darauf eine minimale Abbildung f (d.h. jedes Orbit ist dicht), so dass kein positives Semiorbit $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ und kein negatives Semiorbit $\{f^{-k}(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht ist.

Lösung:

Z.B.

$$X = \{-1, 0, 1\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$f : \begin{cases} -1 & \mapsto 0 \\ 1 & \mapsto 0 \\ -1 + 1/n & \mapsto -1 + 1/(n-1) \\ 1 - 1/n & \mapsto 1 - 1/(n+1) \end{cases}$$

Dann ist X kompakt und f hat die gesuchte Eigenschaft.

Aufgabe 3:
Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist die **Translation** mit Verschiebung a auf dem n-Torus gegeben durch

$$f_a : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n,$$
$$[x] \mapsto [x + a].$$

Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist der **Translationsfluss** mit Richtung a auf dem n-Torus gegeben durch

$$\varphi^a : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n,$$
$$\varphi^a_t([x]) := [x + ta].$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}^n$ ist f_a periodisch?

Lösung:

Behauptung: Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Abbildung
$$f_a : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n, \quad [x] \mapsto [x + a]$$
ist periodisch.

(ii) $a \in \mathbb{Q}^n$ (d.h. a hat ausschließlich rationale Komponenten).

Beweis: $\Longleftarrow$**:** Sei a rational. Dann gilt: $\forall\ j \leq n\ \exists\ p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{p_j}{q_j} = a_j$. Damit ist die Abbildung f_a periodisch mit Periode $r := \prod_{i=1}^{n} q_i$, denn für jede Komponentenabbildung $f_{a,j}$ gilt:

$$f_{a,j}^r([x_j]) = [x_j + r \cdot a] = [x_j + (\prod_{i=1}^{n} q_i) \cdot \frac{p_j}{q_j}] = [x_j + \underbrace{(\prod_{i \leq n, i \neq j} q_i) \cdot p_j}_{\in \mathbb{Z}}] = [x_j] = f_{a,j}([x_j])$$

$\Longrightarrow$**:** Sei $a \in \mathbb{R}^n$ so, dass f_a periodisch mit Periode $r \in \mathbb{N}_{>1}$. Dann gilt für alle $j < n$:

$$[x_j + a_j + (r-1) \cdot a_j] = [x_j + r \cdot a_j] = f_{a,j}^r([x_j]) = f_{a,j}([x_j]) = [x_j + a_j]$$

Daraus folgt: $(r-1) \cdot a_j \in \mathbb{Z}$, d. h. es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$ so, dass $(r-1) \cdot a_j = z$ und somit $a_j = \frac{z}{r-1} \in \mathbb{Q}$.

$\square$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}^n$ ist φ^a periodisch?

Lösung:

Behauptung: Sei $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann sind äquivalent:

(i) Der Fluss

$$\varphi^a : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2, \qquad [x] \mapsto [x + ta]$$

ist im Punkt $[x] \in \mathbb{T}$ periodisch.

(ii) $\forall\ 1 < j \leq n\ \exists\ p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ mit $a_j = \frac{p_j}{q_j} a_1$.

Beweis: $\Longleftarrow$: Es gelte (ii). Falls es ein $j \leq n$ gibt mit $a_j = 0$ reduziert man OBdA auf den Torus $\mathbb{T}^{n-1}$ und erweitert nach Berechnung der Periode wieder.
Dann ist jeder Punkt $[x] \in \mathbb{T}^n$ periodisch mit Periode $\tau := \frac{1}{a_1} \prod_{i=2}^{n} q_i$, denn für jedes $1 < j \leq n$ gilt für die Komponentenabbildung φ_j^a:

$$f_{\tau,j}^a[x] = [x_j + \tau \cdot a_j] = [x_j + \frac{1}{a_1}(\prod_{i=2}^{n} q_i) \cdot \frac{p_j}{q_j} a_1] = [x_j + \underbrace{(\prod_{2 \leq i \leq n, i \neq j} q_i) \cdot p_j}_{\in \mathbb{Z}}] = [x_j]$$

$\Longrightarrow$**:** Es gebe $i, j \leq n, i \neq j$ mit $\nexists\, p, q \in \mathbb{Z}: \; a_j = \frac{p}{q} a_i$. Dann gilt $a_i \neq 0 \neq a_j$.
Annahme: φ^a sei periodisch mit Periode $\tau > 0$. Dann gilt für die Komponentenabbildungen φ_i^a, φ_j^a:

$$
\begin{aligned}
& [x_j + \tau \cdot a_j] = f^a_{\tau,j}[x] = [x_j] \quad [x_i + \tau \cdot a_i] = f^a_{\tau,i}[x] = [x_i] \\
\iff \quad & \tau a_j \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \tau a_i \in \mathbb{Z} \\
\iff \quad & \text{Es gibt } z_i, z_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \text{ so, dass } \tau a_i = z_i,\ \tau a_j = z_j \\
\iff \quad & \frac{z_i}{a_i} = \frac{z_j}{a_j} \\
\iff \quad & a_j = \frac{z_j}{z_i} a_i,
\end{aligned}
$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist.

□

Wieso unterscheiden sich die Antworten?

Die Ergebnisse bei a) und b) sind unterschiedlich, weil in Teil a) lediglich ein diskretes Modell betrachtet wird (Hintereinanderausführung einer Abbildung mit sich selbst), während in Teil b) ein Fluss - also ein stetiges Modell - untersucht wird. Im zweiten Teil kann die Periode $\tau \in \mathbb{R} > 0$ auch rationale und sogar irrationale Werte annehmen.

Aufgabe 4:
Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die **Scherung**

$$
F_a : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,
$$
$$
\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} x_1 + a \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}\right]
$$

ist topologisch transitiv genau dann, wenn a irrational ist.

Lösung:

Sei a rational, dann ist F_a in der 1-ten Komponente periodisch und somit in der 1-ten Komponente auch nicht topologisch transitiv. Somit kann F_A auch auf ganz $\mathbb{T}^2$ nicht topologisch transitiv sein.
Sei also a irrational. Annahme: es gäbe eine Funktion G auf $\mathbb{T}^2$, die stetig, invariant und nicht konstant ist. Es gibt dann eine Fourier Reihe für G:

$$
G(x_1, x_2) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} a_{k_1,k_2} e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}
$$

Wenn G invariant ist unter F_A, dann muss gelten

$$
G(x_1 + a, x_2 + x_1) = G(x_1, x_2)
$$

also

$$
\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} a_{k_1,k_2} e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} a_{k_1,k_2} e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} e^{2\pi i(k_1 a + k_2 x_1)}
$$

und deswegen gilt für alle $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ und alle Startwerte $x_1 \in \mathbb{R}$:

$$
e^{2\pi i(k_1 a + k_2 x_1)} = 1 \text{ oder } a_{k_1,k_2} = 0.
$$

Die erste Bedingung ist nur erfüllt für $k_1 a + k_2 x_1 \in \mathbb{Z}$, was nur möglich ist für $k_1 = k_2 = 0$, da man den Startwert x_1 so wählen kann, dass a und x_1 rational unabhängig sind (nur ein Orbit muss dicht in $\mathbb{T}^2$ sein). Also verschwinden alle a_{k_1,k_2} bis auf $a_{0,0}$. Somit folgt G ist konstant, im Widerspruch zur Annahme.
Somit folgt aus folgenden Lemma (Vorlesung 20.5.) die Behauptung: Die Abbildung f ist topologisch transitiv genau dann, wenn es keine stetige Funktion $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ gibt, die nicht konstant ist und die f-invariant ist.