Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 4

Analysieren Sie folgende mathematischen Modelle der Liebesbeziehung zwischen den Personen Romeo und Julia[1]. Sei $R(t)$ Romeos Liebe zu Julia, $J(t)$ Julias Liebe zu Romeo. Hierbei ist $R(t), J(t) \in \mathbb{R}$, d.h. negative Gefühle sind möglich.

Aufgabe 1:
(Feuer und Eis: Ziehen sich Gegensätze an?) Analysieren Sie

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bJ \\ \dot{J} &= -aJ - bR \end{aligned}$$

für beliebiges $a, b \in \mathbb{R}$.

a)Beschreiben Sie das Langzeitverhalten des Systems. Wie hängt dieses Langzeitverhalten von den Parametern a, b ab?

b) (Welche Beziehungen verlaufen ewig positiv?) Bestimmen Sie für alle Werte der Persönlichkeitsparameter $a < 0, b > 0$ die Menge aller Anfangswerte $(R(0), J(0))$ der Beziehung, so dass für alle $t \geq 0$ gilt: $R(t) > 0, J(t) > 0$.

Aufgabe 2:
Die Umgebung macht den Liebenden zu schaffen: Analysieren Sie

$$\dot{R}(t) = R(t) + J(t) - M,$$
$$\dot{J}(t) = J(t) + R(t) - C,$$

wobei $M > 0$, $C > 0$ die (konstanten) Antipathiewerte der Familien sind. Die Affäre beginnt bei $R(0) = R_0 > 0$, $J(0) = J_0 > 0$. Wie geht sie aus?

Aufgabe 3:
Die Liebenden lassen sich durch (periodisch wiederholten) Klatsch und Tratsch beieinflussen:

$$\dot{R}(t) = R(t) + J(t) + k\sin(\omega t),$$
$$\dot{J}(t) = J(t) + R(t) + k\cos(\omega t).$$

a) ("Ist Klatsch gefährlich?") Gibt es Werte für k (Klatschstärke) und ω (Themenwiederholfrequenz), welche eine hoffnungsvoll beginnende Beziehung $\dot{R}(t) = R(t) + J(t) + k\sin(\omega t)$, $\dot{J}(t) = J(t) + R(t) + k\cos(\omega t)$ mit Anfangswerten $R(0) > 0$, $J(0) > 0$ zerstört, d.h. Lösungen produziert mit $R(t) < 0$ und $J(t) < 0$ für alle t in einem Intervall $[t_0, \infty)$?

b) Geben Sie eine im $\mathbb{R}^4$ offene Menge U von $(k, \omega, R(0), J(0))$ an, so dass die Lösung des Systems aus **(a)** für alle Parameter bzw. Anfangswerte aus U denselben Limes hat.

[1]oder Romina und Julius. Aber die folgenden Gleichungen sind sowieso symmetrisch in R und J.

Aufgabe 4:
a) Zeigen Sie: Wenn die Matrix A linear konjugiert ist zur Matrix B, dann ist der Lösungsfluss zu $\dot{u} = Au$ konjugiert zum Lösungsfluss zu $\dot{u} = Bu$.

b) Zeigen Sie: Für $a > b > 0$ sind die Lösungskurven von $\dot{u} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot u$, die nicht auf den Koordinatenachsen liegen, für $t \to \infty$ tangential an die y-Achse und für $t \to -\infty$ tangential an die x-Achse.

Abgabe: Montag, 17.5.2010, in der Vorlesung