Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 4

Analysieren Sie folgende mathematischen Modelle der Liebesbeziehung zwischen den Personen Romeo und Julia[1]. Sei $R(t)$ Romeos Liebe zu Julia, $J(t)$ Julias Liebe zu Romeo. Hierbei ist $R(t), J(t) \in \mathbb{R}$, d.h. negative Gefühle sind möglich.

Aufgabe 1:
(Feuer und Eis: Ziehen sich Gegensätze an?) Analysieren Sie

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bJ \\ \dot{J} &= -aJ - bR \end{aligned}$$

für beliebiges $a, b \in \mathbb{R}$.

a)Beschreiben Sie das Langzeitverhalten des Systems. Wie hängt dieses Langzeitverhalten von den Parametern a, b ab?

Lösung:

a) Analyse und Beschreibung des linearen Systems:

$$\begin{pmatrix} R' \\ J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Eigenwerte und Eigenräume:

$$char \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda + a) + b^2 = \lambda^2 - a^2 + b^2 = (\lambda - \sqrt{a^2 - b^2})(\lambda + \sqrt{a^2 - b^2})$$

Also sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{a^2 - b^2}$.

Fall 1: $a^2 - b^2 \geq 1, a, b > 0$. Dann hat die Jordanmatrix die Form $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und folgendes Phasenportrait:

[1] oder Romina und Julius. Aber die folgenden Gleichungen sind sowieso symmetrisch in R und J.

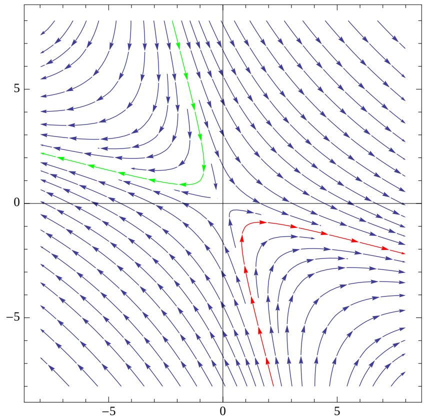

FIGURE 0.1. $a^2 - b^2 > 0, a, b > 0$

Je nach Startwert entwickelt sich die Liebe entweder zu Gunsten von Romeo oder aber Julia. Für die jeweils andere Person sieht es schlecht aus.

Fall 2: $a^2 - b^2 > 0, a > 0, b < 0$. Dann hat die Jordanmatrix die Form $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und folgendes Phasenportrait:

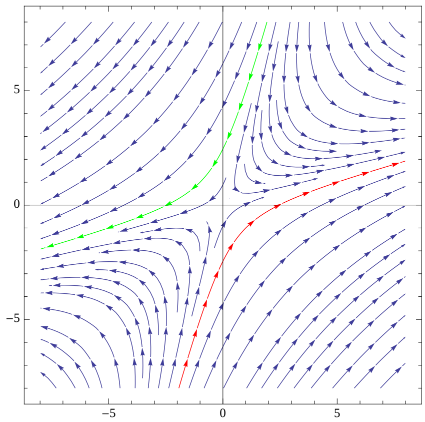

FIGURE 0.2. $a^2 - b^2 > 0, a > 0, b < 0$

Je nach Startwert entwickelt sich die Liebe entweder für beide positiv oder für beide negativ (Siehe auch Aufgabe 2).

Fall 3: $a^2 - b^2 < 0, a, b > 0$. Dann hat die Jordanmatrix die Form $\begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und folgendes Phasenportrait:

Im Fall "unterschiedliche Vorzeichen" schaukeln die Zuneigungen ständig hin und her. Das heißt, alle vier Fälle (beide mögen sich/hassen sich/jeweils der eine so, der andere so) werden zyklisch durchlaufen.

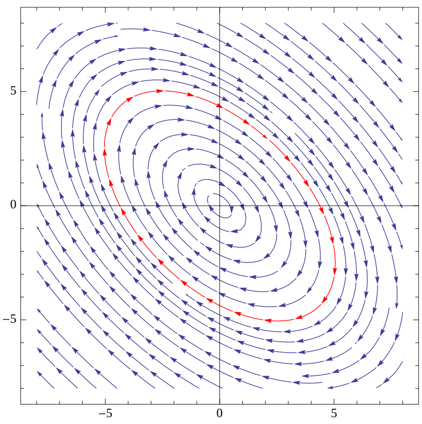

FIGURE 0.3. $a^2 - b^2 < 0, a, b > 0$

Fall 4: $a^2 - b^2 < 0, a > 0, b < 0$. Dann hat die Jordanmatrix die Form $\begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und folgendes Phasenportrait:

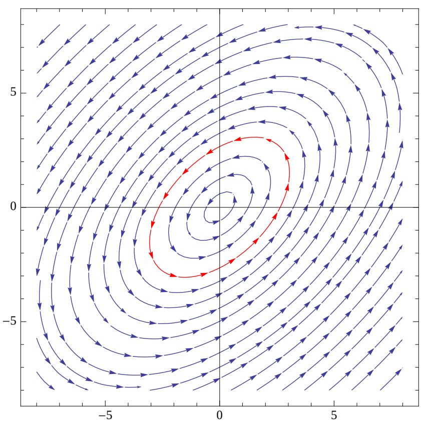

FIGURE 0.4. $a^2 - b^2 < 0, a > 0, b < 0$

Siehe Fall 3 mit umgekehrter Orientierung.

Fall 5: $a > 0, b = 0$. Dann hat die Jordanmatrix die Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ und folgendes Phasenportrait:

Während die eine Person die andere immer mehr hasst bzw. immer mehr liebt (je nach Startwert), zeigt die andere immer weniger Gefühle.

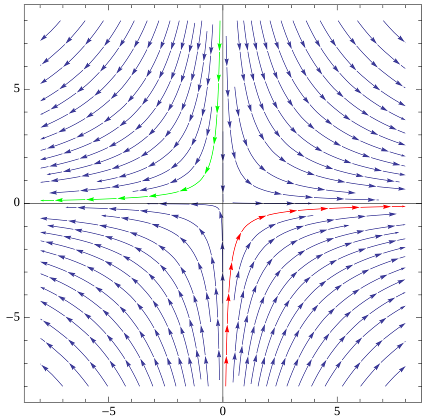

FIGURE 0.5. $a > 0, b = 0$

b) (Welche Beziehungen verlaufen ewig positiv?) Bestimmen Sie für alle Werte der Persönlichkeitsparameter $a < 0,\ b > 0$ die Menge aller Anfangswerte $(R(0), J(0))$ der Beziehung, so dass für alle $t \geq 0$ gilt: $R(t) > 0,\ J(t) > 0$.

Lösung:

b) Wie in Teil a) gezeigt, entwickelt sich die Liebe zyklisch, sobald $a^2 < b^2$. Also sei $a^2 \leq b^2$. Desweiteren müssen natürlich nur Startwerte $R_0, J_0 > 0$ untersucht werden.

Fall 1: $a^2 = b^2$**.** Für alle Startwerte J_0, R_0 mit $R_0 > J_0$ geht die Liebe gut aus, wie man am folgenden Phasenportrait sieht:

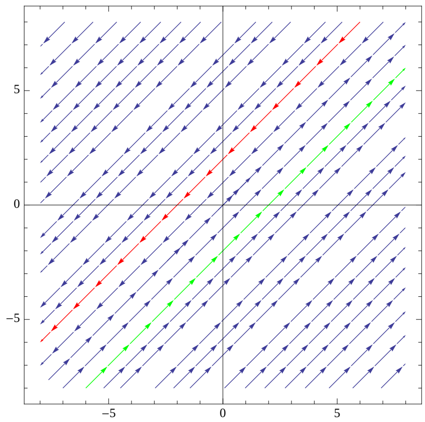

FIGURE 0.6. $a^2 = b^2$

Fall 2: $a^2 > b^2$**.** In diesem Fall ergibt sich ein Phasenportrait wie in Abbildung 2 an der Hauptdiagonalen gespiegelt:

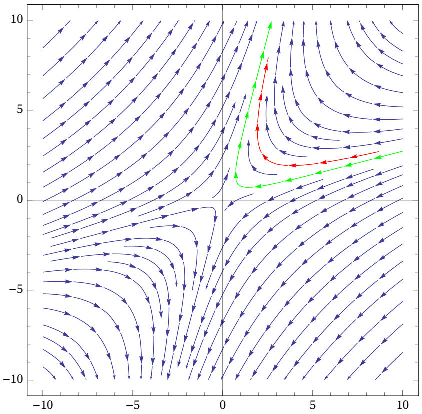

FIGURE 0.7. $a^2 > b^2$

Aufgabe 2:
Die Umgebung macht den Liebenden zu schaffen: Analysieren Sie

$$\dot{R}(t) = R(t) + J(t) - M,$$
$$\dot{J}(t) = J(t) + R(t) - C,$$

wobei $M > 0$, $C > 0$ die (konstanten) Antipathiewerte der Familien sind. Die Affäre beginnt bei $R(0) = R_0 > 0$, $J(0) = J_0 > 0$. Wie geht sie aus?

Lösung:

Beh: Seien $M, C \in \mathbb{R}_{>0}$ die Antipathiewerte der Familien Montague und Capulet und $r := R_0, j := J_0$ die Anfangsgefühle von Romeo und Julia. Die Liebe von Romeo und Julia geht für beide gut aus, wenn gilt:

$$L_0 := 2R_0 + 2J_0 - M - J > 0.$$

Bei $L_0 < 0$ werden sich Romeo und Julia mit der Zeit immer mehr hassen, bei $L_0 = 0$ bleibt die Liebe, wie sie am Anfang ist.

Bew: 1. Zunächst analysiert man (für $M = C = 0$) das Lineare System

$$\begin{pmatrix} R' \\ J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Eigenwerte und Eigenräume:
$char \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$. Also sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$ mit Eigenraum $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\lambda_2 = 0$. Mit der Jordanmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der "Eigenraum-Richtung" $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich folgendes Phasenportrait:

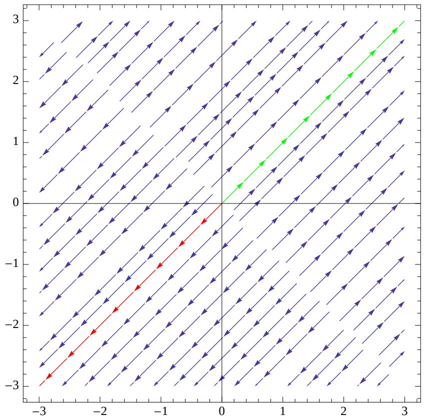

FIGURE 0.8. Fall $M = C = 0$

Lösen der Differentialgleichungen ergibt für Anfangswerte r, j:

$$R(t) = \frac{1}{2}\left((r+j)e^{2t} + r - j\right) \text{ und } J(t) = \frac{1}{2}\left((r+j)e^{2t} + j - r\right)$$

Die Behauptung für die Anfangswerte ist deutlich abzulesen.

2. Seien $M, C > 0$. Durch das Addieren des Vektors $\begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix}$ zum obigen System erhält man das folgende (nicht mehr lineare System):

$$\begin{pmatrix} R' \\ J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix}.$$

Da in beiden Differentialgleichungen lediglich eine unabhängige Konstante addiert wird, ändert sich nichts am Verhalten der Differentialgleichungen. Allerdings wird das Phasenportrait verschoben. Durch Ausrechnen der DGL ergibt sich das lineare Orbit $\{\frac{1}{2}((a+b)-t)|t \in \mathbb{R}\}$. Startwerte oberhalb gehen nach unendlich (für beide Liebenden), Startwerte unterhalb gegen $-\infty$.

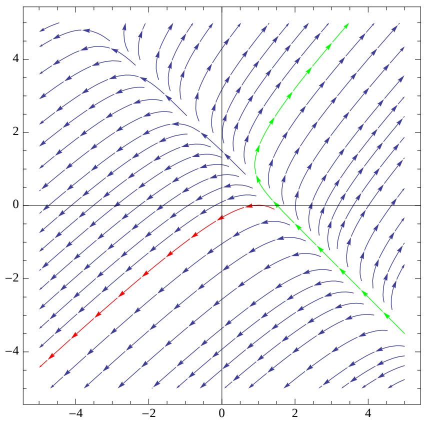

FIGURE 0.9. Fall $M, C > 0$

Aufgabe 3:
Die Liebenden lassen sich durch (periodisch wiederholten) Klatsch und Tratsch beeinflussen:

$$\dot{R}(t) = R(t) + J(t) + k\sin(\omega t),$$

$$\dot{J}(t) = J(t) + R(t) + k\cos(\omega t).$$

a) ("Ist Klatsch gefährlich?") Gibt es Werte für k (Klatschstärke) und ω (Themenwiederholfrequenz), welche eine hoffnungsvoll beginnende Beziehung $\dot{R}(t) = R(t) + J(t) + k\sin(\omega t)$, $\dot{J}(t) = J(t) + R(t) + k\cos(\omega t)$ mit Anfangswerten $R(0) > 0$, $J(0) > 0$ zerstört, d.h. Lösungen produziert mit $R(t) < 0$ und $J(t) < 0$ für alle t in einem Intervall $[t_0, \infty)$?

Lösung:
Es gibt ein kurzes geometrisches Argument, mit dem man die Aussage zeigen kann, und das kein Lösen von Differentialgleichungen erfordert, und eine langwierige Lösung, die Lösen von Differentialgleichungen benutzt.

Lösung durch geometrische Argument:
Für $R(0)$, $J(0)$, ω klein (z.B. ε) und k groß (z.B. $1/\varepsilon$) gilt: Die bei $(R(0), J(0))^T$ beginnende Lösung hat zunächst Geschwindigkeit nahe $(-k, 0)^T$, läuft also schnell nach links entfernt sich schnell von der Geraden $x = -y$. Da der Abstand zu dieser Geraden alsbald nicht klein ist, greift die Dynamik von $\dot{u} = Au$, denn die Norm von diesem Term wird schnell deutlich größer als k. Insbesondere wird es t_0 geben, so dass für jeden Vektor V mit Länge k gilt, dass für $t > t_0$ immer $Au - V$ im linken unteren Quadranten ist. Wegen dem Verhalten des linearen Systems muss daher auch das durch Tratsch gestörte System gegen $(-\infty, -\infty)^T$ konvergieren. $\square$

Lösung durch Rechnen:

Die homogene Lösung ist wie in Aufgabe 2:

$$\begin{pmatrix} R(t)_h \\ J(t)_h \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

dann hat die partikuläre Lösung folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} R(t)_p \\ J(t)_p \end{pmatrix} = c_1(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} -\dot{c}_1(t) + \dot{c}_2(t)e^{2t} &= k\sin(\omega t) \\ \dot{c}_1(t) + \dot{c}_2(t)e^{2t} &= k\cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{c}_2(t) &= \frac{k(\sin(\omega t)+\cos(\omega t))}{2}e^{-2t} \\
\dot{c}_1(t) &= \frac{k(\cos(\omega t)-\sin(\omega t))}{2} \\
c_2(t) &= \frac{k}{2}\int \frac{\sin(\omega t)}{e^{2t}}dt + \int \frac{\cos(\omega t)}{e^{2t}}dt \\
&= \frac{k}{2}\left(-\frac{e^{-2t}(2\sin(\omega t)+\omega\cos(\omega t))}{\omega^2+4} + \frac{e^{-2t}(\omega\sin(\omega t)-\cos(\omega t))}{\omega^2+4}\right) \\
&= \frac{ke^{-2t}}{2}\frac{\sin(\omega t)(\omega-2)-\cos(\omega t)(2+\omega)}{\omega^2+4} \\
c_1(t) &= \frac{k}{2\omega}\left(\sin(\omega t)+\cos(\omega t)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega t)(-2\omega-4)-\cos(\omega t)(2\omega^2+2\omega+4)}{\omega^3+4\omega} \\ \frac{\sin(\omega t)(2\omega^2-2\omega+4)-\cos(\omega t)(2\omega-4)}{\omega^3+4\omega} \end{pmatrix}
$$

Die allgemeine Lösung ist

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} &= c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{k}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega t)(-2\omega-4)-\cos(\omega t)(2\omega^2+2\omega+4)}{\omega^3+4\omega} \\ \frac{\sin(\omega t)(2\omega^2-2\omega+4)-\cos(\omega t)(2\omega-4)}{\omega^3+4\omega} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} R(0) \\ J(0) \end{pmatrix} &= c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{k}{2}\begin{pmatrix} \frac{-(2\omega^2+2\omega+4)}{\omega^3+4\omega} \\ \frac{-(2\omega-4)}{\omega^3+4\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ J_0 \end{pmatrix}, R_0, J_0 > 0
\end{aligned}
$$

Es existieren Lösungen $R(t) < 0, J(t) < 0$, wenn $c_2 < 0$.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_0 + \frac{k(\omega^2+\omega+2)}{\omega^3+4\omega} \\ J_0 + \frac{k(\omega-2)}{\omega^3+4\omega} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_0 + \frac{k(\omega^2+\omega+2)}{\omega^3+4\omega} \\ R_0 + J_0 + \frac{k(\omega+2)}{\omega^2+4} \end{pmatrix} \\
c_2 &= \frac{J_0+R_0}{2} + \frac{k(\omega+2)}{2\omega^2+8}
\end{aligned}
$$

$c_2 < 0$, wenn $\frac{k(\omega+2)}{2\omega^2+8} < 0$ und $\left|\frac{k(\omega+2)}{2\omega^2+8}\right| > \frac{J_0+R_0}{2}$ $\frac{k(\omega+2)}{2\omega^2+8} < 0$ ist erfüllt für $k > 0$ und $\omega < -2$ oder $k < 0$ und $\omega > -2$. Das heißt für passsende J_0 und R_0, welche die Ungleichung $\left|\frac{k(\omega+2)}{2\omega^2+8}\right| > \frac{J_0+R_0}{2}$ erfüllen, gibt es Lösungen mit $R(t) < 0, J(t) < 0$ in einem Intervall von $[t_0, \infty)$. $\square$

b) Geben Sie eine im $\mathbb{R}^4$ offene Menge U von $(k, \omega, R(0), J(0))$ an, so dass die Lösung des Systems aus **(a)** für alle Parameter bzw. Anfangswerte aus U denselben Limes hat.

Lösung:
Wir wollen erreichen, dass die Lösung in J und R gegen unendlich geht. Dazu wählen wir J_0 und R_0 aus $(1, \infty)$ und $k \in (0, 1)$ sowie ω beliebig. Da jetzt sowohl Romeos als auch Julias Gefühle nur sehr gering von Klatsch und Tratsch beeinflusst werden, bleibt die Steigung stets positiv für beide Gefühle und geht somit gegen unendlich. Die Menge U ist also

$$U = \left\{ (k, \omega, J_0, R_0) \in \mathbb{R}^4 \middle| k \in (0,1), J_0, R_0 \in (1, \infty), \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie man leicht sieht, ist diese Menge offen. $\square$

Aufgabe 4:
a) Zeigen Sie: Wenn die Matrix A linear konjugiert ist zur Matrix B, dann ist der Lösungsfluss zu $\dot{u} = Au$ konjugiert zum Lösungsfluss zu $\dot{u} = Bu$.

Lösung:
Zu zeigen ist:

$$A = S^{-1}BS \Rightarrow e^{tA}u_0 = S^{-1}e^{tB}Su_0$$

Zuerst wird gezeigt:

Aus $A = S^{-1}BS$ folgt $e^A = S^{-1}e^B S$, wobei $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k, A \in M(n \times n; \mathbb{R})$. Da $A = S^{-1}BS$, gilt $A^k = S^{-1}B^k S$ und $\frac{1}{k!}A^k = \frac{1}{k!}S^{-1}B^k S = S^{-1}\frac{1}{k!}B^k S$. Damit erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{n} S^{-1}\left(\frac{1}{k!}B^k\right)S = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k\right)S.$$

Da $S \in GL(n; \mathbb{R})$ und $B^k \in M(n \times n; \mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen sind, können wir auf die Stetigkeit von S^{-1}, S und B^k schließen. Dann folgt:

$$\lim_{k\to\infty}\left(S^{-1}B^k S\right) = S^{-1}\left(\lim_{k\to\infty} B^k\right)S.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e^A &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k\right)S\right) \\ &= S^{-1}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k\right)S \\ &= S^{-1}e^B S. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} A &= S^{-1}BS \\ e^A &= S^{-1}e^B S \\ e^{tA} &= S^{-1}e^{tB}S \\ e^{tA}u_0 &= S^{-1}e^B S u_0. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Für $a > b > 0$ sind die Lösungskurven von $\dot{u} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot u$, die nicht auf den Koordinatenachsen liegen, für $t \to \infty$ tangential an die y-Achse und für $t \to -\infty$ tangential an die x-Achse.

Lösung:
Die Steigung der Lösungskurve zur Zeit t ist

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

mit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,und wegen $x(t) = x(0)e^{at}$, $y(t) = y(0)e^{bt}$ ergibt dies

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \text{const} \cdot e^{(b-a)t}.$$

Für $t \to -\infty$ konvergiert diese Steigung gegen 0, somit ist die Lösungskurve tangential an die x-Achse. Für $t \to \infty$ konvergiert die Steigung gegen ∞ oder $-\infty$ (je nach Vorzeichen von $y(0)/x(0)$),

also ist die Lösungskurve tangential an die y-Achse. (Tangential bedeutet hier gleiche Richtung, nicht unbedingt Nähe.)

Im Fall $x(0) = 0$ funktioniert diese Rechnung nicht, aber die Aussage ist dennoch korrekt. Denn dann ist die Lösung auf der y-Achse, also für $t \to \infty$ natürlich parallel zur y-Achse. Für $t \to -\infty$ konvergiert die Lösung sowie deren Geschwindigkeit gegen 0, und der Nullvektor ist parallel zu jedem Vektor, insbesondere der x-Achse. $\square$