Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
Das **Lotka-Volterra-System** ist gegeben durch $\frac{d}{dt}u = f(u)$, mit $f : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} au_1 + bu_1u_2 \\ cu_2 + du_1u_2 \end{pmatrix}$$

wobei $a, d > 0$ und $b, c < 0$.

a) Zeigen Sie: Die Werte der Funktion

$$E\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = (u_1)^{-c}e^{-du_1}(u_2)^a e^{bu_2}$$

sind konstant längs Orbits des Flusses zu f, d.h. für jede Lösung $u = u(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}u = f(u)$$

gilt

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0.$$

b) Beweisen Sie: Alle Orbits sind periodisch.

Aufgabe 2:
Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, so dass für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt, dass $|\lambda| < 1$. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ ist eine Kontraktion.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Der Fluss φ auf $[0,\infty)$, der gegeben ist durch $\varphi_t(x) = e^{at}x$, ist für jedes $a > 0$, $b > 0$ konjugiert zum Fluss ψ auf $[0,\infty)$, der gegeben ist durch $\psi_t(x) = e^{bt}x$, und zwar mittels einer Abbildung $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$h(x) = x^\alpha.$$

Finden Sie das passende α.

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lipschitz-stetig. Sei $a > 0$. Definiere $g = a \cdot f$ (also $g(u) = af(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$). Sei φ der Lösungsfluss zu f und ψ der Lösungsfluss zu g.

Zeigen Sie: Jeder Punkt x, der periodisch ist bezüglich φ mit Periode τ, ist periodisch bezüglich ψ mit Periode τ/a.

Abgabe: Donnerstag, 5.5.2010, in der Vorlesung