Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
Das **Lotka-Volterra-System** ist gegeben durch $\frac{d}{dt}u = f(u)$, mit $f : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} au_1 + bu_1u_2 \\ cu_2 + du_1u_2 \end{pmatrix}$$

wobei $a, d > 0$ und $b, c < 0$.

a) Zeigen Sie: Die Werte der Funktion

$$E\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = (u_1)^{-c}e^{-du_1}(u_2)^a e^{bu_2}$$

sind konstant längs Orbits des Flusses zu f, d.h. für jede Lösung $u = u(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}u = f(u)$$

gilt

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0.$$

Lösung:
Es genügt zu zeigen, dass $(\mathrm{E}(u))_t = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathrm{E}(u)) &= \left(\frac{d}{dt}(u_1^{-c}e^{-du_1})\right)u_2^a e^{bu_2} + u_1^{-c}e^{-du_1}(u_2^a e^{bu_2})_t \\
&= \left(-c\left(\frac{d}{dt}u_1\right)u_1^{-(c+1)}e^{-du_1} - u_1^{-c}d\left(\frac{d}{dt}u_1\right)e^{-du_1}\right)u_2^a e^{bu_2} + u_1^{-c}e^{-du_1}\frac{d}{dt}(u_2^a e^{bu_2}) \\
&= -(c+du_1)u_1^{-(c+1)}e^{-du_1}u_2^a e^{bu_2}\frac{d}{dt}u_1 + (a+bu_2)u_1^{-c}e^{-du_1}u_2^{a-1}e^{bu_2}\frac{d}{dt}u_2 \\
&= \left(-(cu_2+du_1u_2)\frac{d}{dt}u_1 + (au_1+bu_1u_2)\frac{d}{dt}u_2\right)u_1^{-(c+1)}e^{-du_1}u_2^{a-1}e^{bu_2} \\
&= \left(-\left(\frac{d}{dt}u_2\right)\left(\frac{d}{dt}u_1\right) + \left(\frac{d}{dt}u_1\right)\left(\frac{d}{dt}u_2\right)\right)u_1^{-(c+1)}e^{-du_1}u_2^{a-1}e^{bu_2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

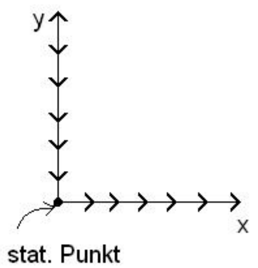
b) Beweisen Sie: Alle Orbits sind periodisch.

Lösung:
Sei

$$V(x,y) = \log E\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Damit gilt für alle Lösungen $(x(t), y(t))$ mit positiven Anfangswerten x_0 und y_0, dass $V(x(t), y(t)) = V(x_0, y_0)$. Die Lösungen von (1) bewegen sich also entlang der Niveaulinien der Funktion V, deren Gestalt daher zu bestimmen ist.

Es sind $(0,0)$ und $\left(-\frac{d}{c}, -\frac{a}{b}\right)$ stationäre Punkte, wobei für $x = 0$ oder $y = 0$ das Verhalten der Orbits auf der x, y-Achse so aussieht:



Es gilt

$$V(x,y) = G(x) + H(y)$$

mit

$$G(x) = -cx - d \log x$$

und

$$H(y) = ay + b \log y.$$

G und H sind auf $(0, \infty)$ definierte, strikt konkave Funktionen (die zweite Ableitung ist negativ), die in x_g bzw. in y_g ihr eindeutiges Maximum annehmen. Ferner ist

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \lim_{x \to \infty} G(x) = \lim_{y \to 0} H(y) = \lim_{y \to \infty} H(y) = -\infty.$$

Hieraus ergibt sich: V ist im Inneren von $\mathbb{R}^2_+$ strikt konkav. Für jede reelle Zahl $\alpha > V(x_g, y_g)$ bildet deshalb die Niveaulinie

$$\Gamma_\alpha := \{ (x,y) | \, V(x,y) = \alpha \}$$

eine geschlossene konvexe Kurve um (x_g, y_g). (Dies ist eine nichttriviale Aussage, die im Allgemeinen für konvexe Funktionen nicht gelten würde.)

Da die Γ_α beschränkt sind, folgt insbesondere, dass alle in $\mathbb{R}^2_+$ liegenden Lösungen von (1) für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind. Da schließlich auf jeder vom Gleichgewichtspunkt (x_g, y_g) verschiedenen Kurve Γ_α die Geschwindigkeit nicht beliebig klein werden kann, muss die Lösung nach endlicher Zeit die geschlossene Kurve einmal umlaufen haben, kehrt also zu ihrem Ausgangspunkt zurück und ist daher periodisch.

Aufgabe 2:
Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, so dass für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt, dass $|\lambda| < 1$. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ ist eine Kontraktion.

Lösung:
Zunächst einmal ist klar, dass die Eigenschaft, eine Kontraktion zu sein, von der Norm abhängt. Betrachten wir beispielsweise die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A hat den Eigenwert $\frac{1}{2}$

mit Vielfachheit 2. Multiplizieren wir mit dem Vektor $x_1 = (1,1)^T$ erhalten wir: $Ax_1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})^T$. Wir sehen, dass

$$\|Ax_1\|_\infty = \frac{3}{2} > 1 = \|x_1\|_\infty$$

gilt. Demnach kann A die Lipschitz-Bedingung bezüglich dieser Norm nicht mit einer Lipschitz-Konstante kleiner 1 erfüllen.

Wahr ist aber, dass bezüglich einer geeigneten Norm die Matrix eine Kontraktion ist. Denn in der Jordan-Normalform lassen sich alle Einträge, die nicht auf der Diagonalen stehen, mit ε multiplizieren, z.B. so dass

$$2n\varepsilon < 1 - \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A\}.$$

Dann ist A bezüglich der Basis, die zu dieser Jordan-Normalform gehört, eine Kontraktion.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Der Fluss φ auf $[0,\infty)$, der gegeben ist durch $\varphi_t(x) = e^{at}x$, ist für jedes $a > 0$, $b > 0$ konjugiert zum Fluss ψ auf $[0,\infty)$, der gegeben ist durch $\varphi_t(x) = e^{bt}x$, und zwar mittels einer Abbildung $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$h(x) = x^\alpha.$$

Finden Sie das passende α.

Lösung:
(durch Einsetzen)

$$(h^{-1} \circ \psi \circ h)(x) = (h^{-1} \circ \psi)(x^{\frac{b}{a}}) = h^{-1}(e^{bt}x^{\frac{b}{a}}) = (e^{bt}x^{\frac{b}{a}})^{\frac{a}{b}} = a^{at}x = \phi(x)$$

□

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lipschitz-stetig. Sei $a > 0$. Definiere $g = a \cdot f$ (also $g(u) = af(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$). Sei φ der Lösungsfluss zu f und ψ der Lösungsfluss zu g.

Zeigen Sie: Jeder Punkt x, der periodisch ist bezüglich φ mit Periode τ, ist periodisch bezüglich ψ mit Periode τ/a.

Lösung:
Der Fluss ψ erfüllt $\phi(at) = \psi(t)$, denn es gilt

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(x) = g(x) = af(x) = a\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(ax).$$

Daraus folgt, dass ψ die Periode $\frac{\tau}{a}$ hat.

□