Übungen zur Vorlesung
Einführung in Dynamische Systeme
Musterlösungen zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Für alle Anfangsdaten $(u_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem

$$\frac{du(t)}{dt} = \left(\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)\right)^{2009}$$
$$u(t_0) = u_0$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

Lösung:

Die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\frac{du(t)}{dt} = \left(\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)\right)^{2009}$$

ist stetig.

Beschränktheit der rechten Seite:

Mit den Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right| &\leq \frac{1}{4}\\
\left|\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right| &< 0.3\\
\left|\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right| &< 0.3\\
\left|\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)\right| &< 1\\
\left|\left(\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)\right)^{2009}\right| &< 1
\end{aligned}$$

sehen wir, dass die rechte Seite der Differentialgleichung beschränkt ist. Lipschitzstetigkeit:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(\sin u)^{29}}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Also ist $I = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Dies ist nicht das maximale Existenzintervall. Tangens hat stärkste Steigung am Rand von I.

$$\max_{x \in I} \left|\tan'(x)\right| = \left|\tan'(\frac{1}{4})\right| = \left|\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{4}\right)}\right| = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{4}\right)} = L$$

Da $\left|\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right| < 0.3$, ist $\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)$ ebenfalls lipschitzstetig, da $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \subset I$ ist. Da $\left|\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)\right| < 1$ gilt, ist $\left(\tan\left(\frac{1}{2010}\left(\tan\left(\frac{(\sin u)^{29}}{4}\right)\right)^{2011}\right)\right)^{2009} < 1$ und somit ebenfalls lipschitzstetig.

Es existiert also eine Lösung (Picard & Lindelöf). Laut Folgerung aus der Vorlesung lässt sich jede global lipschitzstetige und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jedes AWP $\left[\begin{array}{rcl} \dot{u} & = & f(u,t) \\ u(t_0) & = & u_0 \end{array}\right]$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen (also auc autonome DGL wie hier).

b) Bestimmen Sie für alle Anfangsdaten $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ das asymptotische Verhalten dieser Lösung, d.h. finden Sie $\lim_{t\to\infty} u(t)$ und $\lim_{t\to-\infty} u(t)$.

Lösung:

Für $u_0 = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ gilt $f(u_0) = 0$ und somit ist der Grenzwert jeweils u_0.

Für $u_0 \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ gilt $f(u_0) > 0$. Allerdings gilt dann $f((2k+1)\pi) = 0$, somit konvergiert u_0 mit $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = (2k+1)\pi$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = 2k\pi$.

Für $u_0 \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ gilt $f(u_0) < 0$, also $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = (2k-1)\pi$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = 2k\pi$.

Aufgabe 2:
Konstruieren Sie eine Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass gilt:
(i) Für jeden Anfangswert $(u_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} = f(u,t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung mit den Eigenschaften

$$\lim_{t\to\infty} u(t) \in \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) \in \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Lösung:

Wir definieren:

$$\tilde{f}(u) := \begin{cases} 1 & ; \ u < 2^{-\frac{1}{2}} \\ -\sin\left(\pi \cdot \frac{\ln u}{\ln 2}\right) & ; \ u \geq 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$\tilde{f}$ ist lipschitzstetig, da die Ableitung von $\tilde{f}$ beschränkt ist:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(u)| &= \begin{cases} 0 & ; \ u < 2^{-\frac{1}{2}} \\ \left|-\frac{\pi}{u \cdot \ln 2} \cos\left(\pi \cdot \frac{\ln u}{\ln 2}\right)\right| & ; \ u \geq 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} 0 \\ \left|-\frac{\pi}{u \cdot \ln 2}\right| \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} 0 \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{\ln 2} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir setzen $f(u,t) = \tilde{f}(u)$, wobei f in t einfach konstant ist. Dann gilt einerseits (nach dem Satz von Picard-Lindelöf), dass die DGL $\frac{du}{dt} = f(u,t)$ für alle (u_0, t_0) eine eindeutige Lösung besitzt und andererseits konvergieren (nach einem Satz aus der Vorlesung) alle Lösungen gegen die i) nächste von u_0 gesehen rechte Nullstelle von $\tilde{f}(u)$, wenn $\tilde{f}(u_0) > 0$ oder ii) nächste von u_0 gesehen linke Nullstelle von $\tilde{f}(u)$, wenn $\tilde{f}(u_0) < 0$.

Nun sind aber die Nullstellen von $\tilde{f}(u) = f(u,t)$ für $u > 2^{-\frac{1}{2}}$ und $i \in \mathbb{N}$ bei

$$\begin{aligned} 0 &= -\sin\left(\pi \frac{\ln u}{\ln 2}\right) \\ i\pi &= \pi \frac{\ln u}{\ln 2} \\ i \ln 2 &= \ln u \\ u &= 2^i \end{aligned}$$

und haben damit genau die gewünschte Form. Wobei alle $u < 2^{-\frac{1}{2}}$ für $t \to \infty$ gegen die erste Nullstelle (d.h. $1 = 2^0$) konvergieren, da $f(u) > 0$ für alle $u < 2^{-\frac{1}{2}}$.

(ii) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es Anfangswerte $(u_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass für die zugehörige Lösung u gilt: $\lim_{t\to\infty} u(t) = 2^i \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) = 2^{i+1}$.

Lösung:

Wir setzen hierfür einfach $\tilde{g}(u) := -\left|\tilde{f}(u)\right|$, damit ist $\tilde{g}(u) \le 0$ für alle u. Lipschitzstetigkeit und Nullstellen ändern sich offenbar nicht. Somit sind nach dem obigen Satz über die Konvergenz der Lösungen die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 3:
a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = u^2 + 2, \quad u(0) = u_0$.

Lösung:

Behauptung: $u(t) = \sqrt{2}\tan\left(\sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right)$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis: Trennung der Veränderlichen. Aus $\frac{du}{dt} = u^2 + 2$ folgt

$$
\begin{aligned}
\int \left(u^2+2\right)^{-1} du &= \int 1 dt \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) &= t + c \\
\frac{u}{\sqrt{2}} &= \tan\left(\sqrt{2}\,(t+c)\right) \\
u(t) &= \sqrt{2}\tan\left(\sqrt{2}\,(t+c)\right)
\end{aligned}
$$

mit $u(0) = u_0 = \sqrt{2}\tan\left(\sqrt{2}c\right)$ erhalten wir $c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)$.

Daraus folgt

$$
u(t) = \sqrt{2}\tan\left(\sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right)
$$

.

b) Finden Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung.
c) Untersuchen Sie das Verhalten dieser Lösung am Rand des maximalen Existenzintervalls.

Lösung von b) und c):

Behauptung: $\left(-\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\sqrt{2}}, \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\right)$ ist das maximale Existenzintervall dieser Lösung.

Beweis: Der Tangens ist nur intervallweise definiert, hier auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Daraus folgt

$$\begin{array}{rcccl} -\frac{\pi}{2} & < & \sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right) & < & \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right) & < & \sqrt{2}t & < & \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right) \\ \underbrace{-\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}}_{a:=} & < & t & < & \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}}_{b:=} \end{array}$$

Also ist $\lim\limits_{t \to a}\left(\sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$. Damit folgt $\lim\limits_{t \to a}\tan\left(\sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right) = -\infty$. Ebenso für $\lim\limits_{t \to b}\left(\sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$. Damit folgt $\lim\limits_{t \to a}\tan\left(\sqrt{2}t + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right) = \infty$.

Da u hier keinen Grenzwert besitzt, kann keine stetige Fortsetzung nach links bzw. rechts existieren. Damit ist $\left(-\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\sqrt{2}}, \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u_0}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\right)$ das maximale Existenzintervall.

Aufgabe 4:
Finden Sie zu jedem der folgenden Flüsse eine Differentialgleichung, deren Lösungen die Flussorbits sind:

(1) $\varphi_t((x_1, \ldots, x_n)) = (e^{a_1 t} x_1, \ldots, e^{a_n t} x_n)$
(2) $\varphi_t((x_1, x_2)) = (x_1, x_2 + atx_1)$
(3) $\varphi_t((x_1, x_2)) = (x_1 \cos t + x_2 \sin t, x_2 \cos t - x_1 \sin t)$.

Lösung:

Nach dem Lemma "Beziehung zwischen Fluss und Differentialgleichung" löst ein Fluss $\varphi_t(x)$ die DGL $\dot{x} = f(x)$ mit $f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x)$.

(1)

$$\begin{aligned} \varphi_t((x_1, \ldots, x_n)) &= (e^{a_1 t} x_1, \ldots, e^{a_n t} x_n) \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x) &= \Big|_{t=0} (a_1 x_1 e^{a_1 t} x_1, \ldots, a_n x_n e^{a_n t} x_n) \\ &= (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) \end{aligned}$$

Daraus folgt $\dot{x} = (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n)$.

(2)

$$\begin{aligned} \varphi_t((x_1, x_2)) &= (x_1, x_2 + atx_1) \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x) &= \Big|_{t=0} (0, ax_1) \\ &= (0, ax_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt $\dot{x} = (0, ax_1)$.

(3)

$$\begin{aligned} \varphi_t((x_1, x_2)) &= (x_1 \cos t + x_2 \sin t, x_2 \cos t - x_1 \sin t) \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x) &= \Big|_{t=0} (x_2 \cos t - x_1 \sin t, -x_2 \sin t - x_1 \cos t) \\ &= (x_2 - x_1 \cdot 0, -x_2 \cdot 0 - x_1) \\ &= (x_2, -x_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt $\dot{x} = (x_2, -x_1)$.