Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten des Orbits

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$$

der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $x \mapsto A \cdot x$.

b) Bestimmen Sie zu jedem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten der Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = A \cdot u,$$
$$u(0) = x_0.$$

c) Begründen Sie, wieso die Ergebnisse von **a)** und **b)** so verschieden sind, obwohl beide Teilaufgaben ein lineares System auf $\mathbb{R}^2$, und zwar mit derselben Matrix, untersuchen.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Für alle $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ definiert jede der folgenden Abbildungen einen Fluss auf dem Raum X:

(1) $X = \mathbb{R}, \quad \varphi_t(x) = e^{a \cdot t} x$
(2) $X = \mathbb{R}^n, \quad \varphi_t((x_1, \ldots, x_n)) = (e^{a_1 \cdot t} x_1, \ldots, e^{a_n \cdot t} x_n)$.
(3) $X = \mathbb{R}^2, \quad \varphi_t((x_1, x_2)) = (x_1, x_2 + a t x_1)$.

b) Sei φ ein Fluss auf X und ψ ein Fluss auf Y. Zeigen Sie: Die Vorschrift

$$(\varphi \times \psi)_t((x, y)) = (\varphi_t(x), \psi_t(y))$$

definiert einen Fluss auf $X \times Y$.

Bemerkung: $\varphi \times \psi$ heißt der **Produktfluss** auf $X \times Y$.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = 2010 u^{2/3}$$
$$u(0) = 0$$

hat mehrere verschiedene Lösungen. Bestimmen Sie mindestens zwei verschiedene.

b) Gibt es mehrere Lösungen u, die die Bedingung $u|_{[0,\infty)} \equiv 0$ erfüllen? (Beweis der Nichtexistenz oder Angabe von verschiedenen Lösungen erforderlich.)

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Obwohl die Abbildung $u \mapsto \sqrt{u}$ auf $[0, \infty)$ nicht lokal Lipschitz-stetig ist, existiert für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sqrt{u} \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

eine globale Lösung $u : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

b) Ist die Lösung dieses Anfangswertproblems eindeutig? (Beweis oder Angabe von verschiedenen Lösungen erforderlich.)

Abgabe: Donnerstag, 22.4.2010, in der Vorlesung