Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung

Einführung in Dynamische Systeme

Musterlösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Sei $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten des Orbits

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$$

der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch $x \mapsto A \cdot x$.

b) Bestimmen Sie zu jedem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten der Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A \cdot u, \\ u(0) &= x_0. \end{aligned}$$

c) Begründen Sie, wieso die Ergebnisse von **a)** und **b)** so verschieden sind, obwohl beide Teilaufgaben ein lineares System auf $\mathbb{R}^2$, und zwar mit derselben Matrix, untersuchen.

Lösung:

a) Sei $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$f^n(z) = A^n z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} x + \frac{1}{3} \frac{2^n - 1}{2^{2(n-1)}} y \\ 2^{-2n} y \end{pmatrix}$$

Beweis: vollständige Induktion über n
Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^0} x + \frac{1}{3} \frac{2^0 - 1}{2^{2(0-1)}} y \\ 2^{-2 \cdot 0} y \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} x + \frac{1}{3} \frac{2^n - 1}{2^{2(n-1)}} y \\ 2^{-2n} y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} x + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{2^n - 1}{2^{2(n-1)}} y + \frac{1}{3} 2^{-2n} y \\ \frac{1}{4} 2^{-2n} y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n+1}} x + \frac{1}{3} (\frac{2(2^n - 1)}{2^{2n}} y + \frac{1}{2^{2n}} y) \\ 2^{-2(n+1)} y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n+1}} x + \frac{1}{3} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{2n}} y \\ 2^{-2(n+1)} y \end{pmatrix}$$

Weil die drei Folgen $(\frac{1}{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (\frac{2^n - 1}{2^{2(n-1)}})_{n \in \mathbb{N}}, (\frac{1}{2^{2n}})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null konvergieren (für $n \longrightarrow \infty$), geht das Orbit von f für beliebige Startwerte $z \in \mathbb{R}^2$ gegen 0.

$\square$

Der Anfangswert $z = 0$ erzeugt ein Orbit, das nur ein Element (nämlich die 0 selbst) enthält. Man nennt dieses auch Ruhelage. Aussagen über asymptotisches Verhalten erhält man über die Eigenwerte von A.

b) Für jeden Anfangswert $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$u : t \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{3y}{4} e^{\frac{1}{4} t} + \frac{3y}{4} e^{\frac{1}{2} t} + x e^{\frac{1}{2} t} \\ y e^{\frac{1}{4} t} \end{pmatrix}$$

eine Lösung des angegebenen Anfangswertproblems.

Beweis: (Skizze) Durch Einsetzen der Abbildungsvorschrift ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \dot{u} = A \cdot u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{3} u_2 \\ \frac{1}{4} u_2 \end{pmatrix}$$

Es müssen also die beiden Anfangswertprobleme $\begin{bmatrix} \dot{u}_1 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{3} u_2 \\ u_1(0) = x \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \dot{u}_2 = \frac{1}{4} u_2 \\ u_2(0) = y \end{bmatrix}$ gelöst werden. Da das zweite AWP nur von der Funktion u_2 abhängt, wird dieses zunächst mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst (ausführliche Vorgehensweise siehe Aufgabe 3): Die Abbildung

$$u_2 : t \longmapsto y \cdot e^{\frac{1}{4} t}$$

erfüllt beide Bedingungen. Mit dieser Lösung für u_2 kann man das nur noch von u_1 abhängige AWP $\begin{bmatrix} \dot{u}_1 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{3} y \cdot e^{\frac{1}{4} t} \\ u_1(0) = x \end{bmatrix}$ durch die Methode der Variation der Konstanten lösen. Zunächst löst man das homogene Problem $\dot{v}_1 = \frac{1}{2} v_1$. Man erhält hierfür die Lösung: $v_1 = c e^{\frac{1}{2} t}$. Jetzt variiert man die Konstante c zu einer Funktion $c(t)$. Durch Ausnutzen der Produktregel beim Differenzieren und der Voraussetzung, dass unsere Lösung

$u_1(t) = c(t)v_1(t)$ ist, erhalten wir:

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{3}v_1^{-1}(t)u_2(t).$$

Jetzt integrieren wir und berechnen so $c(t)$. Dann folgt:

$$c(t) = -\frac{4y}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{4}{3}y + x.$$

Also ist

$$u_1(t) = -\frac{4y}{3}e^{\frac{1}{4}t} + \frac{4y}{3}e^{\frac{1}{2}t} + xe^{\frac{1}{2}t}.$$

Mit einer Probe stellt man fest, dass die Lösung das oben gestellte AWP löst. Außerdem ist

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \right\| = \infty$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$, und $(0, 0)$ ist eine Ruhelage.

$\square$

c) Im Teil a) wird eine Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ betrachtet, im Teil b) eine Kurve von $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^2$. Außerdem wird in Teil a) für jeden Startwert das Verhalten der diskreten Folge der Hintereinanderausführungen bestimmt und in Teil b) wird eine differenzierbare Abbildung gesucht, die eine Differentialgleichung löst. Da zwei verschiedene Abbildungen untersucht werden, können auch verschiedene Ergebnisse dabei herauskommen.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Für alle $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ definiert jede der folgenden Abbildungen einen Fluss auf dem Raum X:

(1) $X = \mathbb{R}$, $\quad \varphi_t(x) = e^{a\cdot t}x$
(2) $X = \mathbb{R}^n$, $\quad \varphi_t((x_1, \ldots, x_n)) = (e^{a_1\cdot t}x_1, \ldots, e^{a_n\cdot t}x_n)$.
(3) $X = \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi_t((x_1, x_2)) = (x_1, x_2 + atx_1)$.

b) Sei φ ein Fluss auf X und ψ ein Fluss auf Y. Zeigen Sie: Die Vorschrift

$$(\varphi \times \psi)_t((x, y)) = (\varphi_t(x), \psi_t(y))$$

definiert einen Fluss auf $X \times Y$.

Bemerkung: $\varphi \times \psi$ heißt der **Produktfluss** auf $X \times Y$.

Lösung:

a) Es gilt für jeweils alle $s, t \in \mathbb{R}$, $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

(1) $\varphi_0(x) = e^{a\cdot 0}x = e^0x = x$ und $\varphi_{s+t}(x) = e^{(a\cdot(s+t))}x = e^{(as+at)}x = e^{as}e^{at}x = e^{as}(e^{at}x) = \varphi_s(\varphi_t x)$.
(2) Rechnung komponentenweise wie in (1).
(3) $\varphi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + a \cdot 0 \cdot x_1) = (x_1, x_2)$ und
$\varphi_{s+t}(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + a \cdot (s + t)x_1) = (x_1, x_2 + asx_1 + atx_1) = \varphi_s(\varphi_t(x_1, x_2))$

b) Seien $x \in X, y \in Y, s, t \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen der Flusseigenschaften von φ und ψ:
$(\varphi \times \psi)_0(x,y) = (\varphi_0(x), \psi_0(y)) = (x,y)$ sowie
$(\varphi \times \psi)_{s+t}(x,y) = (\varphi_{s+t}(x), \psi_{s+t}(y)) = (\varphi_s(\varphi_t(x)), \psi_s(\psi_t(y))) = (\varphi \times \psi)_s((\varphi \times \psi)_t(x,y))$.

$\square$

Aufgabe 3:
a) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2010u^{2/3} \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

hat mehrere verschiedene Lösungen. Bestimmen Sie mindestens zwei verschiedene.

b) Gibt es mehrere Lösungen u, die die Bedingung $u|_{[0,\infty)} \equiv 0$ erfüllen? (Beweis der Nichtexistenz oder Angabe von verschiedenen Lösungen erforderlich.)

Lösung von a) und b)

Das Anfangswertproblem $\begin{bmatrix} \dot{u} = 2010u^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{bmatrix}$ besitzt z. B. die folgenden Lösungen:
1. u=0
2. u: t $\longmapsto (\frac{2010t}{3})^3$
3. u: t $\longmapsto \begin{cases} (\frac{2010t}{3})^3 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$

Beweis: 1. u=0 ist trivial für die Anfangswerte $t_0 = 0 = x_0$.
2. + 3. Mit der Methode der Trennung der Variablen berechnet man mit v:= u(t):

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= 2010u(t)^{2/3} \\ du(t) &= 2010u(t)^{2/3}dt \\ u(t)^{-2/3}du(t) &= 2010dt \\ \int v^{-2/3}dv &= \int 2010dt \\ 3v^{1/3} + const_1 &= 2010t + const_2 \\ u(t) &= \left(\frac{2010t + c}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

für beliebige Konstanten c. Für $c = 0$ erhält man die Lösung 2. [Um Lösung 3 zu beweisen, muss jetzt noch die Differenzierbarkeit im Punkt 0 nachgewiesen werden] Die rechtsseitige Ableitung (also die der Nullfunktion) ist 0. Die linksseitige Ableitung ist:

$$u'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\frac{2010 \cdot t}{3}\right)^3 = 0$$

Damit ist auch 3. eine Lösung, die genau wie bei 1. auf dem Intervall $[0, \infty)$ konstant auf die 0 abbildet.

$\square$

Aufgabe 4:
a) Zeigen Sie: Obwohl die Abbildung $u \mapsto \sqrt{u}$ auf $[0, \infty)$ nicht lokal Lipschitz-stetig ist, existiert für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sqrt{u} \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

eine globale Lösung $u : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

b) Ist die Lösung dieses Anfangswertproblems eindeutig? (Beweis oder Angabe von verschiedenen Lösungen erforderlich.)

Lösung:

Die Abbildung $f : u \mapsto \sqrt{u}$ ist Lipschitz-stetig und auf $[a, \infty)$ für jedes $a > 0$, z.B. $a = 0.5$. Das Anfangswertproblem hat also lokale Lösungen um (u_0, t_0) für alle $(u_0, t_0) \in (a, \infty) \times \mathbb{R}$. Die Lösungen existieren und sind eindeutig mindestens auf einem Intervall der Breite $\delta = \delta(a)$, die im Bereich $(u_0, t_0) \in (a, \infty) \times \mathbb{R}$ nicht von u_0 und t_0 abhängt.

Außerdem ist f auf $[a, \infty)$ positiv (sogar nach unten beschränkt). Jede lokale Lösung ist also steigend, kann also die Menge $[a, \infty)$ nicht auf der rechten Seite verlassen. Sie läßt sich also nach rechts wieder um $\delta(a)$ (eindeutig) fortsetzen, und das beliebig oft. Somit läßt sich die Lösung auf $(t_0 - \delta, \infty)$ eindeutig fortsetzen.

Es gilt also für jede Lösung u: Wenn $u(t_1)$ positiv ist für irgendein $t_1 \in \mathbb{R}$, dann ist die Lösung eindeutig fortsetzbar auf $[t_1, \infty)$.

Möglich ist noch, dass u Nullstellen hat (das kommt auch vor). Wenn $u(t_1) = 0$, dann muss gelten $u(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, t_1]$. Und da $u \equiv 0$ eine Lösung auf jedem Intervall ist, ist damit die Lösung auf $(-\infty, t_1]$ eindeutig.

Da f keine Nullstellen außer 0 hat, ist jede Lösung u monoton steigend. Somit gilt

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0.$$

Wegen der Monotonie gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t_1 so dass $u|_{(-infty, t_1)}$ nur Werte im Intervall $[0, \varepsilon)$ annimmt.

Jede Lösung des AWP hat die Form $u(t) = 0$ für $t \leq t_c$ (mit einem $t_c \in \mathbb{R}$, das von u_0 abhängt) und $u(t) = b(t - t_c)^2$ für $t \geq t_c$, wobei b unabhängig vom Anfangswert ist. Deshalb gibt es nur ein t_1, das die Anfangsbedingung erfüllt. Somit ist u global definiert und global eindeutig.

$\square$