Einführung in die Morse-Theorie: Änderung der Homotopieklasse von $f^{-1}((-\infty, a])$ bei nicht einem degenerierten kritischen Punkt

Mara Sommerfeld

Seminar Dynamische Systeme und Ergodentheorie
September 2008

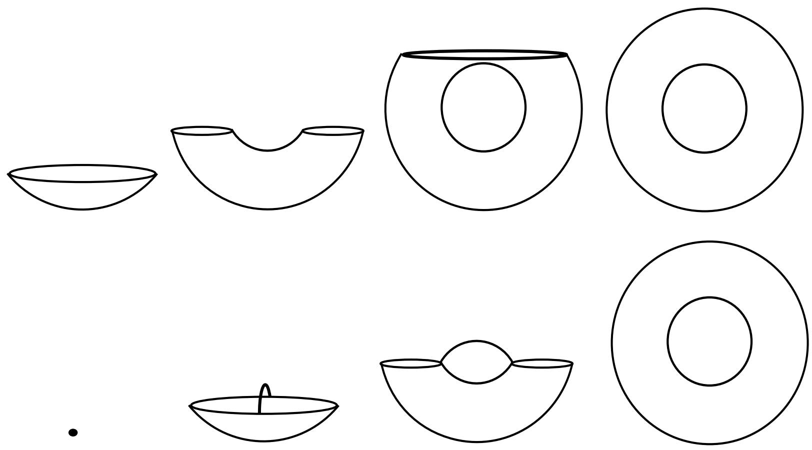
Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der Morse-Theorie untersucht man topologische Eigenschaften der Mengen $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ zu einer glatten reellwertigen Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit.

Man kann sich dazu eine hügelige Landschaft vorstellen, wobei die Höhe des Bodens jeweils gerade dem Funktionswert von f entspricht. Nun erhöht man langsam den Meeresspiegel und beobachtet dabei, wie sich die Wasseroberfläche verändert. Offenbar verändern sich die Eigenschaften von M^a nur dann, wenn ein kritischer Punkt überschritten wird. Wie sich M^a verändert, hängt damit zusammen, wie die Funktion f in der Umgebung des kritischen Punktes aussieht: In einigen Richtungen liegt der Punkt in einer Senke, in anderen Richtungen ist der kritische Punkt ein Hochpunkt. Dort, wo der kritische Punkt einen Hochpunkt bildet, verbinden sich beim Erhöhen des Wasserspiegels getrennte Bereiche von M^a. Man kann also einen Zusammenhang zur Hessematrix vermuten.

Als Beispiel betrachten wir einen aufrecht stehenden Torus, die Funktion f soll einfach die Höhe sein.



Bevor der Wert 0 erreicht wird, ist M^a leer. Wie die Menge M^a jeweils nach dem Überschreiten eines weiteren kritschen Punktes aussieht, sieht man in der oberen Reihe der Abbildung. Darunter sieht man eine Menge, auf die sich M^a stetig deformieren lässt. Diese Menge entspricht der Menge M^a vor Überschreiten des letzten kritischen Punktes zusammen mit einer angeklebten Scheibe, die 0-,1-,1- beziehungsweise 2-dimensional ist. Die Dimension der Scheibe hängt davon ab, ob der kritische Punkt ein Tiefpunkt, ein Sattelpunkt oder ein Hochpunkt ist.

2 Definitionen

2.1 Morse-Index

Im Folgenden bedeutet *glatt* immer C^∞. Mit einer *Mannigfaltigkeit* ist immer eine C^∞-Mannigfaltigkeit gemeint.

Definition 1. Sei f eine glatte reellwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit. Ein Punkt p von M heißt *kritischer Punkt* von f, falls die Ableitung $df : T_pM \to \mathbb{R}$ die Nullabbildung ist.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Für eine Karte $x : M \ni U \to \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ bilden die Vektoren $(dx)^{-1}(e_i)$ eine Basis von T_pM, für die man üblicherweise ∂_{x_i} schreibt.

Desweiteren sei $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p))$.

Lemma 2. *Es sei p ein kritischer Punkt einer glatten reellwertigen Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es eine symmetrische Bilinearform $Hf_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, so dass für jedes lokale Koordinatensystem x gilt:*

$$Hf_p(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

Hf_p *heißt* Hessesche Bilinearform.

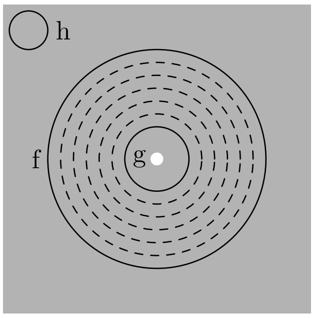
Definition 3. Ein kritischer Punkt einer glatten reellwertigen Funktion auf einer Mannigfaltigkeit heißt *nicht degeneriert*, falls die Hessesche Bilinearform nicht ausgeartet ist.

Definition 4. Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt von einer glatten reellwertigen Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit. Die Dimension λ des Unterraumes, auf dem die Hessesche Bilinearform negativ definit ist, heißt *Morse-Index* oder auch *Index* von f in p.

2.2 Topologische Begriffe

Definition 5. $f, g : X \to Y$ seien stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y. Falls es eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, so dass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle x, heißen f und g *homotop*. Man schreibt $f \simeq g$. Die Abbildung H ist eine *Homotopie* von f nach g.

Beispiel: $f, g, h : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$



f und g sind homotop, h ist weder zu f noch zu g homotop.

Definition 6. A sei ein Teilraum von einem topologischen Raum X. A heißt *Deformationsretrakt* von X falls es eine Homotopie H gibt, für die gilt:

$$H(x,0) = x \qquad \text{für alle } x \in X \tag{1}$$
$$H(x,1) \in A \qquad \text{für alle } x \in X \tag{2}$$
$$H(a,t) = a \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und für alle } t \in [0,1] \tag{3}$$

Definition 7. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ und $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$.

Bemerkung 1. Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen*.

Beispiel:
$A \subset X$ sei ein Deformationsretrakt von X mit der zugehörigen Homotopie H. Wähle

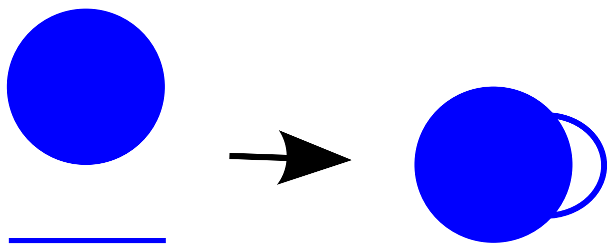
$$f : X \to A, \quad f(x) = H(x,1)$$
$$g : A \to X, \quad f(a) = a$$

Dann gilt $f \circ g = \mathbb{1}_A$ und $g \circ f = f = H(\cdot,1) \simeq \mathbb{1}_X$.

Definition 8. Die abgeschlossene k-dimensionale Einheitskugel $e^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\}$ wird im Folgenden als eine k-dimensionale Zelle bezeichnet.

Der Rand ist $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k | x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1\}$.

Definition 9. Sei Y ein topologischer Raum und $g : S^{k-1} \to Y$ eine stetige Abbildung vom Rand der k-dimensionalen Zelle nach Y. Dann verstehen wir unter Y *mit einer angeklebten k-dimensionalen Zelle* den Raum, der aus der disjunkten Vereinigung von Y und e^k entsteht, wenn der Rand S^{k-1} mit seinem Bild in Y identifiziert wird.

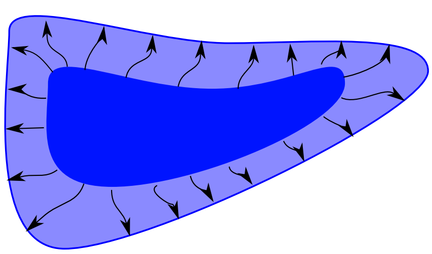


3 Hauptteil

3.1 Keine kritischen Punkte enthalten $\Rightarrow$ Homotopieäquivalenz

Definition 10. $M^a := f^{-1}((-\infty, a])$

Satz 11. *f sei eine glatte reellwertige Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. $a < b$ seien reelle Zahlen, so dass die Menge $f^{-1}([a, b])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält. Dann gilt: Die Mengen M^a und M^b sind diffeomorph. Zusätzlich ist M^a ein Deformationsretrakt von M^b.*



Beweis. Wähle ein glattes Vektorfeld, das auf $f^{-1}([a, b])$ mit $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$ übereinstimmt und außerhalb einer kompakten Umgebung von $f^{-1}([a, b])$ verschwindet.

Dann ist das Vektorfeld global Lipschitzstetig und erzeugt einen Fluss ϕ_t. Auf $f^{-1}([a,b])$ gilt:

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) = \frac{1}{\|\nabla f(\phi_t(x))\|^2}\big\langle \nabla f(\phi_t(x)), \nabla f(\phi_t(x))\big\rangle = 1$$

Daher bildet der Diffeomorphismus $\phi_{b-a} : M \to M$ die Menge M^a auf M^b ab. Entlang des Flusses lässt sich M^b zu M^a deformieren. Die zugehörige Homotopie lautet:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{falls } f(x) \leq a \\ \phi_{t(a-f(x))}(x) & \text{falls } a \leq f(x) \leq b \end{cases}$$

□

3.2 Lemma von Morse

Das Lemma von Morse ist entscheidend für den Beweis des nächsten Satzes. An dieser Stelle wird nur die Aussage zitiert, den Beweis findet man im letzten Abschnitt des Dokuments.

Lemma 12. *Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt einer glatten Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gibt es eine Umgebung U von p und lokale Koordinaten $u_1, \ldots u_n$ mit p im Ursprung, so dass auf U gilt:*

$$f = f(p) - u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Dabei ist λ der Index von f an der Stelle p.

3.3 Änderung der Homotopieklasse bei einem nicht degenerierten kritischen Punkt

Satz 13. *Sei f eine glatte Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index λ. Es sei $f(p) = c$. Angenommen, es gibt ein $\tilde{\varepsilon}$, so dass $f^{-1}([c-\tilde{\varepsilon}, c+\tilde{\varepsilon}])$ kompakt ist und keine kritischen Punkte außer p enthält. Dann gibt es für genügend kleine ε einen Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$, der durch Anheften einer λ-dimensionalen Zelle an $M^{c-\varepsilon}$ entsteht.*

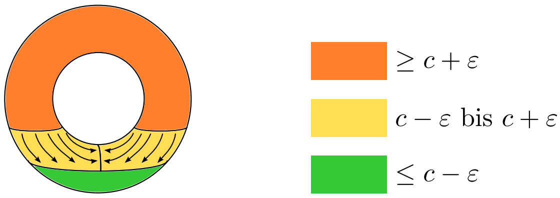
Bemerkung 2. Wenn $f^{-1}([c-\tilde{\varepsilon}, c+\tilde{\varepsilon}])$ kompakt ist, folgt für $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, dass $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge auf einer Mannigfaltigkeit ebenfalls kompakt ist.

Um den Satz zu beweisen, gehen wir folgendermaßen vor:

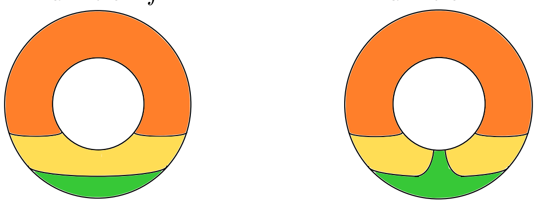
Wir werden eine Funktion F konstruieren, die in einer Umgebung von p kleiner als f ist und sonst mit f übereinstimmt, so dass die Mengen $M^{c+\varepsilon}$ und $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$ identisch sind. Die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ besteht aus $M^{c-\varepsilon}$ und einer Region H um p, in der sich eine an $M^{c-\varepsilon}$ geeignete λ-dimensionale Zelle e^λ befindet. Weiterhin hat F die gleichen kritischen Punkte wie f.

Da $F^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ keine kritischen Punkte enthält, folgt mit dem letzten Satz, dass $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$ ist.

Im nächsten Schritt wird $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ zu $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ deformiert.



Funktion f Funktion F



Oben in der Abbildung ist die Aussage des Satzes dargestellt. Darunter sieht man die Nivaumengen der Funktionen f und F im Vergleich.

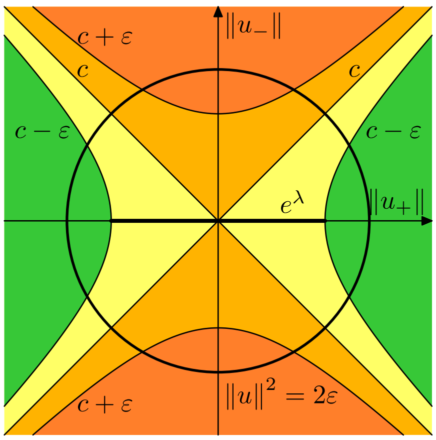
Beweis. Nach dem Lemma von Morse ist f auf einer Umgebung U von p von der Form

$$f = c - u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Wähle ε so klein, dass

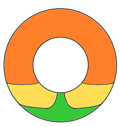
- $F^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält,
- die Kugel $B_{\sqrt{2\varepsilon}}(0)$ im Bild der Einbettung $(u_1, \ldots, u_n) : U \to \mathbb{R}^n$ liegt.

Wir betrachten das Bild der Einbettung $(u_1, \ldots, u_n) : U \to \mathbb{R}^n$.



Wir schreiben $u = u_- + u_+$, wobei $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_- = (u_1, \ldots, u_\lambda, 0, \ldots, 0)$, $u_+ = (0, \ldots, 0, u_{\lambda+1}, \ldots, u_n)$.

Mit e^λ bezeichnen wir die Menge $\{u \mid \|u\|^2 \leq \varepsilon, u_+ = 0\}$.

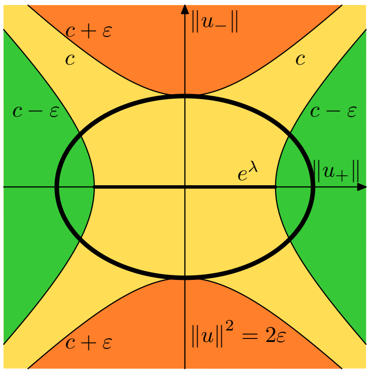


Nun wird eine glatte Funktion F konstruiert, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ enthält die Menge $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$.
- $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$ und $f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ stimmen überein.
- Die Menge $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ enhält keine kritischen Punkte.

Wir wollen F konstruieren, indem wir eine glatte, nicht negative Funktion von f subtrahieren, die außerhalb einer Umgebung von p verschwindet. Wie könnte diese Umgebung aussehen?

- Sie sollte eine Umgebung von e^λ enthalten.
- Damit $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$, wählen wir eine Umgebung, die in $M^{c+\varepsilon}$ enthalten ist.



Als Träger von $f-F$ kommt zum Beispiel der Ellipsoid $E := \left\{u \middle| \|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2 \leq 2\varepsilon\right\}$ infrage. Tatsächlich werden wir $f-F$ so wählen, dass $f-f$ zum Rand von E hin kleiner wird und spätestens ab dem Rand gleich 0 ist.

Lemma 14. *Der Ellipsoid E liegt in $M^{c+\varepsilon}$.*

Beweis. Aus $\|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2 \leq 2\varepsilon$ folgt

$$f = c - \|u_-\|^2 + \|u_+\|^2 \leq c + \frac{1}{2}(\|u_-\|^2 + 2\|u_+\|^2) \leq c + \varepsilon$$

□

Korollar 1. *Wenn $F \leq f$ gilt und der Träger von $f-F$ in E liegt, folgt $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$*

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Funktionen ein:

Definition 15.

$$\xi(u) = \|u_-\|^2 = u_1^2 + \cdots + u_\lambda^2$$
$$\eta(u) = \|u_+\|^2 = u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Damit ergibt sich:

$$f = c + \xi - \eta.$$

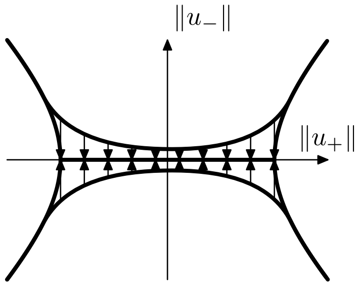
$$E = \{\xi + 2\eta < 2\varepsilon\}$$

Wir setzen $F := f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, wobei $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

Die Konstruktion der Funktion F ist damit abgeschlossen. Wir wissen, dass $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$ und dass die Menge $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ keine kritischen Punkte enthält. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Teilmenge $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ ist auch $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ kompakt.

Korollar 2. $F^{-1}(\infty, c - \varepsilon])$ *ist ein Deformationsretrakt von* $M^{c+\varepsilon}$*.*

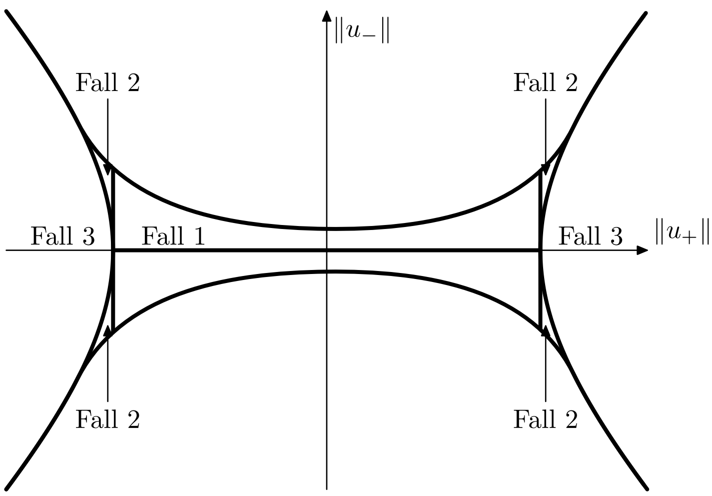
Wir müssen also nur noch zeigen, dass $M \cup e^\lambda$ eine Deformationsretrakt von $F^{-1}((\infty, c - \varepsilon])$ ist. Dabei wissen wir schon, dass $M \cup e^\lambda \subset F^{-1}(\infty, c - \varepsilon])$ gilt.



Die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ besteht aus $M^{c-\varepsilon}$ und einer Region $H = F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$. H enthält die Menge e^λ. Offensichtlich sind die gemeinsamen Punkte von e^λ und $M^{c-\varepsilon}$ genau die Randpunkte von e^λ, sie liegen im Rand von M.

Wir deformieren die Menge $M^{c-\varepsilon} \cup H$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$, indem wir H vertikal zusammenziehen.

Zur Definition der Deformation D unterscheiden wir drei Fälle:



Für den zweiten Fall $u \in H$ und $\xi > \varepsilon$ definieren wir

$$s_t := 1 - t + t\sqrt{\frac{(\xi - \varepsilon)}{\eta}}.$$

Die Funktion D lautet:

$$D(t,u) = \begin{cases} u_- + tu_+ & \text{für } u \in H, \xi \leq \ eps \\ u_- + s_t u_+ & \text{für } u \in H, \xi \geq \varepsilon \\ u & \text{für } u \in M^{c-\varepsilon} \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass D stetig ist und dass D die Menge $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ auf $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ deformiert. □

3.4 Beweis des Lemmas von Morse

Im Beweis haben wir das Lemma von Morse verwendet, das wir noch nicht bewiesen haben. Das soll an dieser Stelle nachgeholt werden. Zur Erinnerung hier noch einmal die Aussage:

Lemma 16. *Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt einer glatten Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Dann gibt es eine Umgebung U von p und lokale Koordinaten $u_1, \ldots u_n$ mit p im Ursprung, so dass auf U gilt:*

$$f = f(p) - u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

Dabei ist λ der Index von f an der Stelle p.

Zum Beweis benötigen wir noch folgendes Hilfslemma:

Lemma 17. *f sei eine glatte Funktion in einer konvexen Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$. Dann gibt es glatte Funtion $g_1, \ldots, g_n$, so dass*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

und zusätzlich $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Beweis.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i dt.$$

Man wähle $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n)dt$. □

Beweis. Das Hilfslemma werden wir verwenden, um f ähnlich wie eine Bilinearform durch eine Matrix h_{ij} darzustellen, wobei die h_{ij} Funktionen sind: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_i, \cdot x_j$. O. B. d. A. sei der nicht degenerierte kritische Punkt p von f der Punkt 0 in $\mathbb{R}^n$ und $f(p) = f(0) = 0$. Dann gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

wobei $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, da 0 ein kritischer Punkt ist. Daher gilt auch für g_i:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$$

Insgesamt folgt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i, \cdot x_j.$$

Die Matrix h_{ij} ist in jedem Punkt symmetrisch. Im nächsten Schritt soll die Matrix h_{ij} diagonalisiert werden, so dass in der Diagonalen nur Einräge 1 und -1 stehen.Das geschieht induktiv, wobei die Matrix nach jedem Schritt die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h'_{ij} \end{pmatrix}$$

Die Restmatrix h'_{ij} ist dabei wieder symmetrisch und regulär.

Bei einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform wählt man dazu schrittweise eine neue Basis, wodurch die neuen Koordinaten definiert werden. Genauso, wie sich dabei die neuen Koordinaten aus den alten ergeben, werden wir auch in diesem Fall die neuen Koordinatenfunktionen definieren.

Wir nehmen induktiv an, dass wir vor dem r-ten Schritt Koordinaten $x_1, \dots x_n$ gewählt haben, so dass

$$f(x_1, \dots x_n) = \pm x_1^2 \cdots \pm x_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r} H_{ij}(x_1, \dots, x_n) x_i, x_j$$

H_{ij} ist symmetrisch und in einer Umgebung U von 0 regulär. Daher lassen sich die letzten $n - r + 1$ Koordinaten so verändern, dass $H_{rr} \neq 0$ auf U gilt. Es sei $g = \sqrt{|H_{rr}|}$.

Mit $y_i = x_i$ für $i \neq r$ und $y_r = g \cdot (x_r + \sum_{i>r} x_i \cdot \frac{H_{ir}}{H_{rr}})$ erhält man neue Koordinaten , für die gilt:

$$f(y_1, \dots y_n) = \pm y_1^2 \cdots \pm y_r^2 + \sum_{i,j>r} H'_{ij}(y_1, \dots, y_n) y_i, y_j$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung, auf der $y_1, \dots y_n$ Koordinatenfunktionen sind. Nach Umsortieren steht vor den ersten λ Koordinaten ein Minus. Dann ist λ offensichtlich der Morseindex von f. □

4 Literatur

J. Milnor: Morse Theory,
Annals of Mathematics Studies
Princeton University Press