Anosov–Flüsse und das Theorem von Wojtkowski

Seminar über Dynamische Systeme und Ergodentheorie

Gundula Meckenhäuser

15. September 2008

1 Hyperbolizität und Anosov-Flüsse

Im folgenden bezeichne (M, g) eine kompakte, glatte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g.
Lokal können dynamische Systeme durch lineare Abbildung approximiert werden, durch ihr Differential. Besitzt das Differential eine kontrahierende und eine expandierende Richtung, dann spricht man von Hyperbolizität. Dieser Begriff wird hier näher erklärt und in Zusammenhang mit (geodätischen) Flüssen auf Mannigfaltigkeiten gestellt.

Definition. Sei $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Eine kompakte, f–invariante Teilmenge $\Lambda \subset M$ heißt hyperbolisch, falls es für alle $p \in \Lambda$ eine d_pf–invariante Spaltung

$$T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$$

und Konstanten $k > 0$ und $0 < \rho < 1 < \mu$ gibt, so dass:

$$\begin{aligned}
\|d_pf^n(v)\| &\leq k\rho^n\|v\| \quad \forall n \geq 0,\ v \in E_p^s \\
\|d_pf^{-n}(v)\| &\leq k\mu^{-n}\|v\| \quad \forall n \geq 0,\ v \in E_p^u
\end{aligned}$$

Ist $\Lambda = M$, dann heißt f Anosov Diffeomorphismus.

Beispiel. Betrachte den durch $L := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induzierten Diffeomorphismus

$$F_L : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,\ (x, y) := (2x + y, x + y) \mod 1$$

Die lineare Abbildung $d_{(0,0)}F_L : T_{(0,0)}\mathbb{T}^2 \to T_{(0,0)}\mathbb{T}^2$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ und $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0, 1)$ und es gilt

$$T_{(0,0)}\mathbb{T}^2 = \mathrm{Eig}(d_{(0,0)}F_L, \lambda_2) \oplus \mathrm{Eig}(d_{(0,0)}F_L, \lambda_1)$$

Diese Spaltung ist offensichtlich $d_{(0,0)}F_L$–invariant und für $v \in \mathrm{Eig}(d_{(0,0)}F_L, \lambda_2)$ folgt:

$$d_{(0,0)}F_L(v) = \lambda_2 v \ \Rightarrow\ \| \left(d_{(0,0)}F_L\right)^n (v)\| = \lambda_2^n\|v\|$$

Ebenso erhalten wir für $v \in \mathrm{Eig}(d_{(0,0)}F_L, \lambda_1)$:

$$d_{(0,0)}F_L(v) = \lambda_1 v \ \Rightarrow\ \left(d_{(0,0)}F_L\right)^{-1} (v) = \lambda_1^{-1} v \ \Rightarrow\ \| \left(d_{(0,0)}F_L\right)^{-n} (v)\| = \lambda_1^{-n}\|v\|$$

Nun betrachten wir $t_p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $v \mapsto p + v$. Das Differential $d_{(0,0)}t_p : T_{(0,0)}\mathbb{T}^2 \to T_p\mathbb{T}^2$ ist ein linearer Isomorphismus und damit erhalten wir für alle anderen Punkte $p \in \mathbb{T}^2$ folgende Spaltung des Tangentialraumes:

$$T_p\mathbb{T}^2 = d_{(0,0)}t_p(\mathrm{Eig}(d_{(0,0)}F_L, \lambda_2)) \oplus d_{(0,0)}t_p(\mathrm{Eig}(d_{(0,0)}F_L, \lambda_1))$$

Definition. Sei $\phi^t : M \to M$ der Fluss eines Vektorfeld X auf M. Eine kompakte, ϕ^t–invariante Teilmenge $\Lambda \subset M$ heißt hyperbolisch, falls es für alle $p \in \Lambda$ eine $d_p\phi^t$–invariante Spaltung

$$T_pM = E_p^0 \oplus E_p^s \oplus E_p^u$$

mit $E_p^0 = \mathbb{R}X(p)$ und Konstanten $k > 0$ und $0 < \rho < 1 < \mu$ gibt, so dass:

$$\|d_p\phi^t(v)\| \leq k\rho^t\|v\| \quad \forall t \geq 0,\ v \in E_p^s \tag{1}$$

$$\|d_p\phi^{-t}(v)\| \leq k\mu^{-t}\|v\| \quad \forall t \geq 0,\ v \in E_p^u \tag{2}$$

Ein Fluss $\phi_t : M \to M$ heißt Anosov, falls ganz M eine hyperbolische Menge ist.

Bemerkung. In [2] wird gezeigt: Der geodätische Fluss einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung ist Anosov. Als Anwendung des folgenden Theorems von Wojtkowski werden wir dies für den Fall $\dim M = 2$ beweisen.

2 Theorem von Wojtkowski

Bemerkung. Sei $\phi^t : M \to M$ der Fluss eines Vektorfeld X auf M. Dann gilt:

$$d_p\phi^t(X(p)) = X(\phi^t(p)) \ \forall p \in M$$

Betrachte den Quotientenvektorraum $\widehat{T}_pM := T_pM/\mathbb{R}X(p)$ mit kanonischer Projektion $\pi : T_pM \to \widehat{T}_pM$. Dann ist $\pi \circ d_p\phi^t : T_pM \to \widehat{T}_{\phi^t(p)}M$ eine lineare Abbildung mit $\mathbb{R}X(p) \subset \ker \pi \circ d_p\phi^t$. Also gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes genau eine lineare Abbildung $A_p^t : \widehat{T}_pM \to \widehat{T}_{\phi^t(p)}M$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d_p\phi^t"] \arrow[d, "\pi"'] & T_{\phi^t(p)}M \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{T}_pM \arrow[r, "A_p^t"'] & \widehat{T}_{\phi^t(p)}M \end{tikzcd}$$

Mit der Flusseigenschaft $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ erhalten wir

$$A_p^{t+s} = A_{\phi^s(p)}^t \circ A_p^s$$

Satz. *Sei $\phi^t : M \to M$ ein Fluss zum Vektorfeld X. Dann gilt: ϕ^t ist genau dann Anosov, falls es für alle $p \in M$ eine A_p^t–invariante Spaltung $\widehat{T}_pM = \widehat{E}_p^s \oplus \widehat{E}_p^u$ und Konstanten $c, \lambda > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt:*

$$\|A_p^t(v)\| \leq ce^{-\lambda t}\|v\| \quad \forall v \in \widehat{E}_p^s \tag{3}$$

$$\|A_p^{-t}(v)\| \leq ce^{-\lambda t}\|v\| \quad \forall v \in \widehat{E}_p^u \tag{4}$$

Beweis. Eine Richtung ist einfach: Sei ϕ^t Anosov. Dann gilt:

$$\widehat{T}_pM = T_pM/\mathbb{R}X(p) = (E_p^0 \oplus E_p^s \oplus E_p^u)/\mathbb{R}X(p) \cong \widehat{E}_p^s \oplus \widehat{E}_p^u$$

wobei $\widehat{E}_p^s := \pi(E_p^s)$ und $\widehat{E}_p^u := \pi(E_p^u)$. Diese Spaltung ist offensichtlich A_p^t–invariant: Sei $\hat{v} \in \widehat{E}_p^s$ und $v \in E_p^s$ so dass $\pi(v) = \hat{v}$, dann gilt:

$$A_p^t(\hat{v}) = A_p^t \circ \pi(v) = \pi \circ \underbrace{d_p\phi^t(v)}_{\in E_p^s} \in \widehat{E}_p^s$$

Außerdem gilt:

$$\|A_p^t(\hat{v})\| = \|\pi \circ d_p\phi^t(v)\| \leq \|d_p\phi^t(v)\| \leq k\rho^t\|v\|$$

Mit $\lambda_s := -\ln(\rho)$ und geeignetem c_s erhalten wir

$$\|A_p^t(\hat{v})\| \leq c_s e^{-\lambda_s t}\|\hat{v}\|$$

Analog zeigt man die Invarianz von $\widehat{E}_p^u$ und mit $c := \max\{c_s, c_u\}$, $\lambda := \min\{\lambda_s, \lambda_u\}$ folgen (3) und (4).
Nun zur anderen Richtung. Sei $\widehat{T}_pM = \widehat{E}_p^s \oplus \widehat{E}_p^u$ eine A_p^t–invariante Spaltung, die (3) und (4) erfüllt. Wir wählen eine Riemannsche Metrik g auf M, so dass für alle $p \in M$ gilt: $\|X(p)\| = 1$ und identifizieren $\widehat{T}_pM$ mit $(\mathbb{R}X(p))^\perp \subset T_pM$. Es gilt:

$$d_p\phi^t(v) = A_p^t(\hat{v}) + g\left(d_p\phi^t(v), X(\phi^t(p))\right) \cdot X(\phi^t(p))$$

Wir setzen:

$$E_p^s := \{v + \lambda(p, v) \cdot X(p)|\ v \in \widehat{E}_p^s\}$$

wobei λ so gewählt werden muss, dass E_p^s invariant unter $d_p\phi^t$ ist.

$$\begin{aligned} d_p\phi^t(v + \lambda(p, v) \cdot X(p)) &= d_p\phi^t(v) + \lambda(p, v) \cdot X(\phi^t(p)) \\ &= A_p^t(v) + \big(\lambda(p, v) + g(d_p\phi^t(v), X(\phi_t(p)))\big) \cdot X(\phi^t(p)) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $A_p^t(v) \in \widehat{E}^s_{\phi^t(p)}$, also fordern wir für die Invarianz:

$$\lambda(p, v) + g(d_p\phi^t(v), X(\phi^t(p)) = \lambda(\phi^t(p), A_p^t(v)) \tag{5}$$

Definiere

$$\begin{aligned} u(p, v) &:= -\frac{d}{dt}\big(g(d_p\phi^t(v), X(\phi^t(p)))\big)|_{t=0} \\ \Rightarrow u(\phi^t(p), A_p^t(v)) &= -\frac{d}{ds}\big(g(d_p\phi^s(v), X(\phi^s(p)))\big)|_{s=t} \end{aligned}$$

Nun definieren wir:

$$\lambda(p, v) := \int_0^\infty u(\phi^s(p), A_p^s(v))\, ds$$

Das Integral konvergiert und λ erfüllt tatsächlich (5):

$$\begin{aligned}
\lambda(\phi^t(p), A_p^t(v)) &= \int_0^\infty u(\phi^{t+s}(p), A_p^{t+s}(v))\, ds \\
&= \int_t^\infty u(\phi^r(p), A_p^r(v))\, dr \\
&= \lambda(p,v) - \int_0^t u(\phi^s(p), A_p^s(v))\, ds \\
&= \lambda(p,v) + g\big(d_p\phi^s(v), X(\phi^s(p))\big)|_0^t \\
&= \lambda(p,v) + g\big(d_p\phi^t(v), X(\phi^t(p))\big)
\end{aligned}$$

Definiere analog $E_p^u := \{v + \mu(p,v)\cdot X(p) |\ v \in \widehat{E}_p^u\}$ mit passendem μ. Offensichtlich erhalten wir $\mathbb{R}X(p) \oplus E_p^s \oplus E_p^u = T_pM$. Für $v_s \in E_p^s$ und $v_u \in E_p^u$ gilt für positive Zeiten

$$\begin{aligned}
\|d_p\phi^t(v_s)\| = \|A_p^t(\hat{v}_s)\| \le ce^{-\lambda t}\|(\hat{v}_s)\| \le k\rho^t\|v_s\| \\
\|d_p\phi^{-t}(v_u)\| = \|A_p^{-t}(\hat{v}_u)\| \le ce^{-\lambda t}\|(\hat{v}_u)\| \le k\mu^{-t}\|v_u\|
\end{aligned}$$

wobei $\rho := e^{-\lambda}$, $\mu := e^{\lambda}$ und $k := c$. □

Definition. Es sei $Q : TM \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, d.h. für jedes $p \in M$ ist $Q_p : T_pM \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form auf T_pM mit folgenden Eigenschaften

1. Q ist stetig in p.
2. Q_p kann auf $\widehat{T}_pM$ projiziert werden, d.h. für alle $p \in M$, $v \in T_pM$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$Q_p(v + aX(p)) = Q_p(v)$$

3. Q ist nicht ausgeartet auf $\widehat{T}M$.
4. Die Lie–Ableitung von Q in Richtung X

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X Q : TM \to \mathbb{R} \\
&(\mathcal{L}_X Q)_p(v) := \frac{d}{dt}|_{t=0} Q_{\phi^t(p)}(d_p\phi_t(v))
\end{aligned}$$

ist stetig.

Dann heißt $\phi^t : M \to M$ strikt monoton bzgl. der quadratischen Form Q, falls die Projektion der Lie–Ableitung auf das Quotientenbündel $\widehat{T}M$ positiv definit ist.

Theorem von Wojtkowski. *Jeder strikt monotone Fluss $\phi^t : M \to M$ ist Anosov.*

Beweis. Betrachte das Bündel der positiven Kegel $C := \{v \in \widehat{T}M |\ Q(v) \geq 0\}$und das Bündel der negativen Kegel $C' := \{v \in \widehat{T}M |\ Q(v) \leq 0\}$ bzgl. der quadratischen Form Q. Mit $C(p)$ bezeichnen wir den positiven Kegel am Punkt $p \in M$.
Die stetige Abbildung

$$\mathcal{L}_X Q : \widehat{S}M \to \mathbb{R},\ (p, v) \mapsto (\mathcal{L}_X Q)_p(v)$$

nimmt auf $\widehat{S}M$ ihr Infimum $c_1 := \inf\{(\mathcal{L}_X Q)_p(v)|\ (p, v) \in \widehat{S}M\}$ an. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{L}_X Q$ positiv definit, also ist $c_1 > 0$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_X Q)_p(v) \geq c_1\ \forall (p, v) \in \widehat{S}M \\
\Rightarrow &(\mathcal{L}_X Q)_p \left(\frac{v}{\|v\|}\right) \geq c_1\ \forall (p, v) \in \widehat{T}M,\ v \neq 0 \\
\Rightarrow &(\mathcal{L}_X Q)_p(v) \geq c_1 \|v\|^2\ \ \forall (p, v) \in \widehat{T}M
\end{aligned} \tag{6}$$

Außerdem gibt es eine Konstante $c_2 > 0$ so dass gilt:

$$\|Q_p(v)\| \leq c_2 \|v\|^2\ \forall (p, v) \in \widehat{T}M \tag{7}$$

Denn sei Q nicht überall verschwindend, sonst ist (7) trivial. Betrachte die stetige Abbildung

$$\|Q\| : \widehat{S}M \to \mathbb{R},\ (p, v) \mapsto \|Q_p(v)\|$$

Sie nimmt ihr Supremum $c_2 := \sup\{\|Q_p(v)\||\ (p, v) \in \widehat{S}M\}$ an, welches größer als Null ist da Q nicht überall verschwindet. Eine ähnliche Betrachtung wie bei (6) liefert die gewünschte Abschätzung. Aus (6) und (7) folgt mit $a = \frac{c_1}{2c_2}$:

$$\frac{d}{ds}|_{s=t} Q(A^s(v)) \geq c_1 \|A^t(v)\| \geq 2a \|Q(A^t(v))\| \tag{8}$$

Aus der ersten Ungleichung erhalten wir für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned}
A^t(C) &\subset \operatorname{int}(C) \cup \{0\} \\
A^{-t}(C') &\subset \operatorname{int}(C') \cup \{0\}
\end{aligned} \tag{9}$$

Integration der zweiten Ungleichung aus (8) liefert

$$\begin{aligned}
\frac{Q(A^t(v))}{Q(v)} &\geq e^{2at}\ \forall\ A^t(v) \in \operatorname{int}(C) \\
\frac{Q(A^t(v))}{Q(v)} &\leq e^{-2at}\ \forall\ A^t(v) \in \operatorname{int}(C')
\end{aligned} \tag{10}$$

Nun zeigen wir, dass

$$\begin{aligned}
C_\infty(p) &:= \bigcap_{t \geq 0} A^t_{\phi^{-t}(p)} C(\phi^{-t}(p)) \subset \widehat{T}_p M \\
C'_\infty(p) &:= \bigcap_{t \geq 0} A^{-t}_{\phi^{t}(p)} C'(\phi^{t}(p)) \subset \widehat{T}_p M
\end{aligned}$$

eine A_p^t–invariante Spaltung von $\widehat{T}_pM$ mit den Eigenschaften des vorangehenden Satzes liefern. Es gilt:

$$\begin{aligned}
A_p^s C_\infty(p) &= A_p^s \bigcap_{t\geq 0} A^t_{\phi^{-t}(p)} C(\phi^{-t}(p)) \\
&= \bigcap_{t\geq 0} A_p^s \circ A^t_{\phi^{-t}(p)} C(\phi^{-t}(p)) \\
&= \bigcap_{t\geq 0} A^{s+t}_{\phi^{-t}(p)} C(\phi^{-t}(p)) \\
&= \bigcap_{t\geq 0} A^{s+t}_{\phi^{-(t+s)}(\phi^s(p))} C(\phi^{-(s+t)}\phi^s(p)) \\
&= \bigcap_{u\geq s} A^{u}_{\phi^{-u}(\phi^s(p))} C(\phi^{-u}\phi^s(p)) \\
&= \bigcap_{u\geq 0} A^{u}_{\phi^{-u}(\phi^s(p))} C(\phi^{-u}\phi^s(p)) \\
&= C_\infty(\phi^s(p))
\end{aligned}$$

Also ist $C_\infty(p)$ A_p^t–invariant. Beim vorletzten Gleichheitszeichen haben wir folgendes benutzt: Für $t_2 > t_1 > 0$ gilt

$$A^{t_2}_{\phi^{-t_2}(p)} C(\phi^{-t_2}(p)) \subset A^{t_1}_{\phi^{-t_1}(p)} C(\phi^{-t_1}(p))$$

Denn setzen wir in (9) $p = \phi^{-t_2}(p)$ und $t = t_2 - t_1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& A^{t_2-t_1}_{\phi^{-t_2}(p)} C(\phi^{-t_2}(p)) \subset \operatorname{int}(C(\phi^{-t_1}(p)) \cup \{0\} \subset C(\phi^{-t_1}(p) \\
\Rightarrow\ & A^{t_2}_{\phi^{-t_2}(p)} C(\phi^{-t_2}(p)) = A^{t_1}_{\phi^{-t_1}(p)} \circ A^{t_2-t_1}_{\phi^{-t_2}(p)} C(\phi^{-t_2}(p)) \subset A^{t_1}_{\phi^{-t_1}(p)} C(\phi^{-t_1}(p))
\end{aligned}$$

Betrachte nun $C_1(p) := A^1_{\phi^{-1}(p)} C(\phi^{-1}(p))$ und $C_1'(p) := A^{-1}_{\phi^1(p)} C'(\phi^1(p))$. Dann gibt es Konstanten c_3, $c_4 > 0$ so dass

$$\begin{aligned}
Q_p(v) &\geq c_3 \|v\|^2 \ \forall v \in C_1(p) \\
-Q_p(v) &\geq c_4 \|v\|^2 \ \forall v \in C_1'(p)
\end{aligned} \tag{11}$$

Denn sei $0 \neq v \in C_1(p)$, sonst ist die Ungleichung (11) trivial. Die stetige Abbildung

$$Q_p : \left\{ \frac{v}{\|v\|} \mid v \in C_1(p) \right\} \to \mathbb{R},\ v \mapsto Q_p(v)$$

nimmt aus Kompaktheitsgründen ihr Infimum c_3 an. Dies ist größer als Null, da nach (9) gilt:

$$0 \neq v \in A^1_{\phi^{-1}(p)} C(\phi^{-1}(p)) \subset \operatorname{int}\left(C(\phi^{-1}(p))\right)$$

Analog folgt die Existenz von c_4.
Für $v \in C_\infty(p) \subset C_1(p)$ und $t > 0$ folgt:

$$c_2\|v\|^2 \geq Q_p(v) = Q_p(A_p^t A_p^{-t} v) \geq e^{2at} Q_p(A_p^{-t} v) \geq c_3 e^{2at} \|A_p^{-t} v\|^2$$

Mit $b := \sqrt{\frac{c_2}{c_3}}$ erhalten wir

$$\|A_p^{-t} v\| \leq b e^{-2at} \|v\| \quad \forall t \geq 0,\ v \in C_\infty(p) \tag{12}$$

Für $\widehat{E}_p^u := \operatorname{span}(C_\infty(p))$ bleiben sowohl die expandierende Eigenschaft (12), eventuell mit einer anderen Konstante b_u, als auch die A_p^t–Invarianz erhalten. Analog definiert man den A_p^t–invarianten Untervektorraum $\widehat{E}_p^s := \operatorname{span}(C'_\infty(p))$ und zeigt

$$\|A_p^t v\| \leq b_s e^{-2at} \|v\| \quad \forall t \geq 0,\ v \in C'_\infty(p) \tag{13}$$

für ein $b_s > 0$. Setzte schließlich $b := \max\{b_u, b_s\}$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\widehat{T}_p M = \widehat{E}_p^s \oplus \widehat{E}_p^u$. Dafür zeigen wir, dass in $\widehat{E}_p^u$ ein l–dimensionaler Untervektorraum liegt: Für jedes $t \geq 0$ ist $Q_{\phi^{-t}(p)}$ eine nicht ausgeartete quadratische Form der Signatur (l, m). D.h. es gibt einen l–dimensionalen Unterraum auf dem die Form positiv definit ist. Insbesondere liegt dieser in $C(\phi^{-t}(p))$. Da $A^t_{\phi^{-t}(p)}$ ein Isomorphismus ist, liegt auch in $A^t_{\phi^{-t}(p)} C(\phi^{-t}(p))$ ein l–dimensionaler Unterraum. Betrachte nun:

$$G^t := \{V \subset A^t_{\phi^{-t}(p)} C(\phi^{-t}(p)) \subset \widehat{T}_p M |\ V \text{ist l-dimensionaler Unterraum}\}$$

Jedes G^t ist nichtleer, abgeschlossenen und enthalten in der Grassmann-Mannigfaltigkeit:

$$G_l(\widehat{T}_p M) := \{V \subset \widehat{T}_p M |\ V \text{ist l-dimensionaler Unterraum}\}$$

Sie ist kompakt und jeder endliche Schnitt über (G^t) ist nichtleer, denn für $t_2 > t_1 > 0$ gilt: $A^{t_2}_{\phi^{-t_2}(p)}(U_{t_2}) \subset A^{t_1}_{\phi^{-t_1}(p)}(U_{t_1})$. Also folgt: $\bigcap_{t \geq 0} G^t \neq \emptyset$, d.h. in $C_\infty(p)$ liegt ein l–dimensionaler Unterraum und damit auch in $\widehat{E}_p^u$. Genauso zeigt man, dass in $\widehat{E}_p^s$ ein m–dimensionaler Unterraum liegt. Aus (12) und (13) folgt $\widehat{E}_p^u \cap \widehat{E}_p^s = \emptyset$. Mit $\dim \widehat{T}_p M = l + m$ erhalten wir $\widehat{T}_p M = \widehat{E}_p^s \oplus \widehat{E}_p^u$. $\square$

3 Anwendung des Theorems von Wojtkwoski

Zuerst eine Erinnerung an die Differentialgeometrie:
Ist M eine kompakte, C^∞–Mannigfaltikeit mit Riemannscher Metrik, dann gibt es zu jedem Paar $(p, v) \in TM$ genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Geodäte $\gamma_{(p,v)} : \mathbb{R} \to M$ mit

$$\gamma_{(p,v)}(0) = p$$
$$\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v$$

Es bezeichene $SM := \{(p, v) \in TM| \, \|v\| = 1\}$ das Einheitsspährenbündel. Nun betrachten wir den geodätischen Fluss $\phi^t : SM \to SM$ der gegeben ist durch

$$\phi^t(p, v) := \big(\gamma_{(p,v)}(t), \dot{\gamma}_{(p,v)}(t)\big)$$

Dieser lässt SM tatsächlich invariant, denn für Geodäten gilt: $\|\dot{\gamma}(t)\| = const$, also bekommen wir für alle t und $(p, v) \in SM$:

$$\|\dot{\gamma}_{(p,v)}(t)\| = \|\dot{\gamma}_{(p,v)}(0)\| = \|v\| = 1$$

Eine naheliegende Frage ist nun: Wann ist ein geodätischer Fluss Anosov? Im Folgenden wollen wir das Resultat, dass geodätische Flüsse auf kompakten Riemannschen Mannigfaltikeiten mit negativer Schnittkrümmung Anosov sind, für den Fall $\dim M = 2$ mit Hilfe des Theorems von Wojtkowski beweisen.

Satz. *Sei M eine orientierte, kompakte, 2–dimensionale C^∞–Mannigfaltikeit mit negativer (nicht notwendig konstanter) Schnittkrümmung k. Dann ist der geodätische Fluss Anosov.*

Beweis. Betrachte die Projektion $\pi : SM \to M$ und die Liesche Gruppe S^1. Es ist bekannt, dass (SM, π, M, S^1) ein Hauptfaserbündel ist. Die fasertreue und auf den Fasern einfach transitive Wirkung von S^1 auf SM ist gegeben durch:

$$A : SM \times S^1 \to SM \quad \big((p, v), g\big) \mapsto (p, gv)$$

Sei U eine Kartenumgebung von $p \in M$, dann bekommen wir lokal für $(p, v) \in \pi^{-1}(U)$ folgende Zerlegung:

$$T_{(p,v)}SM = T_pM \oplus T_gS^1$$

wobei $g \in S^1$ so gewählt ist, dass $v = g \cdot e_1$ für eine Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von T_pM. Die Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ beschreibt in T_pM die Kreislinie S^1. Es bezeichne $\frac{\partial}{\partial\theta}$ das Einheitstangentialvektorfeld an E_p. Damit defineren wir folgendes Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(SM)$:

$$V(p, v) := \left(0, \frac{\partial}{\partial\theta}|_g\right)$$

Sei $\phi^t : SM \to SM$ der geodätische Fluss zu M und $X \in \mathfrak{X}(SM)$ das Vektorfeld welches den geodätischen Fluss erzeugt:

$$X(p, v) := \frac{d}{dt}\big(\gamma_{(p,v)}(t), \dot{\gamma}_{(pv,)}(t)\big)|_{t=0} = (v, 0)$$

Die Vektorfelder X und V sind in jedem Punkt linear unabhängig. Betrachte nun das Vektorfeld $H = [V, X] \in \mathfrak{X}(SM)$, welches senkrecht zu X ist. Dann bilden X, V, H einen lokalen Rahmen für $T(SM)$ und es gilt nach [3]:

$$[X, H] = kV$$

Also bekommen wir für $\xi \in T_{(p,v)}SM$

$$d_{(p,v)}\phi^t(\xi) = x(t)X(\phi^t(p, v)) + y(t)H(\phi^t(p, v)) + z(t)V(\phi^t(p, v))$$

und schreiben dafür (kurz) $d\phi^t(\xi) = xX+yH+zV$. Wenden wir $d\phi^{-t}$ auf diese Gleichung an, dann erhalten wir

$$\xi = xd\phi^{-t}\big(X(\phi^t(p, v))\big) + yd\phi^{-t}\big(H(\phi^t(p, v))\big) + zd\phi^{-t}\big(V(\phi^t(p, v))\big)$$

Differenzieren nach t und $[X, Z](p) = \frac{d}{dt}\big(d_p\phi^{-t}(Z(\phi^t(p)))\big)$ liefern

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{x}d\phi^{-t}\big(X(\phi^t(p, v))\big) + xd\phi^{-t}([X, X]) \\
&\quad + \dot{y}d\phi^{-t}\big(H(\phi^t(p, v))\big) + yd\phi^{-t}([X, H]) \\
&\quad + \dot{z}d\phi^{-t}\big(V(\phi^t(p, v))\big) + zd\phi^{-t}([X, V]) \\
&= d\phi^{-t}[\dot{x}X(\phi^t(p, v)) + (\dot{y} - z)H(\phi^t(p, v)) + (\dot{z} + ky)Y(\phi^t(p, v))]
\end{aligned}$$

Da das Differential ein Isomorphismus ist und X, V, H in jedem Punkt linear unabhängig sind, erfüllen die Koeffizienten folgende Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 0 \\
\dot{y} &= z \\
\ddot{y} + ky &= 0
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir folgende 1–Form auf SM

$$\alpha : SM \to \bigcup_{(p,v)} T^*_{(p,v)}(SM), \quad \alpha_{(p,v)}(\xi) := g(d_{(p,v)}\pi(\xi), v)$$

Offensichtlich gilt $\alpha_{(p,v)}(V(p, v)) = 0$. Wir zeigen nun, dass $\alpha_{(p,v)}$ auch auf $(H(p, v))$ verschwindet: Nach Voraussetzung ist M eine orientierte, kompakte Riemannsche C^∞–Mannigfaltigkeit. Also gibt es eine fastkomplexe Struktur auf M, d.h. eine glatte Abbildung $J : TM \to TM$ so dass $J_p := J|_{T_pM}$ ein Isomorphismus ist mit $J_p \circ J_p = -\,\mathrm{Id}$. Also entspricht $J_p(v)$ dem Vektor der bei Drehung von v um $\frac{\pi}{2}$ entsteht. Es folgt

$$\begin{aligned}
& d_{(p,v)}\pi(H(p, v)) = J(v) \\
\Rightarrow\ & \alpha_{(p,v)}(H(p, v)) = 0
\end{aligned}$$

Aus Dimensionsgründen erhalten wir $\operatorname{span}\{H, V\} = \ker\alpha$. Da $\dot{x} = 0$ ist der Kern von $\alpha_{(p,v)}$ $d\phi^t$–invariant. Also bekommen wir für $\eta \in \ker\alpha$

$$d\phi^t(\eta) = yH + \dot{y}V \ \wedge\ \ddot{y} + ky = 0$$

Setze für $\xi = x(t)X(p,v) + y(t)H(p,v) + z(t)V(p,v)$ aus $T_{(p,v)}SM$

$$Q : T(SM) \to \mathbb{R},\ Q_{(p,v)}(\xi) = yz$$

Diese quadratische Form ist stetig und auf $\widehat{T}_{(p,v)}SM$ projiziert nicht ausgeartet. Es bleibt also zu zeigen, dass die Lie–Ableitung positiv definit ist: Sei $\xi \in \widehat{T}_{(p,v)}SM \cong \ker \alpha_{(p,v)}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Q_{(p,v)}(\xi) &= \frac{d}{dt}\big(Q_{\phi^t_{(p,v)}}(d\phi^t(\xi))\big)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big(Q_{\phi^t_{(p,v)}}(yH + \dot{y}V)\big)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(y\dot{y}) \\
&= \dot{y}^2 - ky^2 \\
&= z^2 - ky^2 > 0
\end{aligned}$$

Also ist $\phi^t : SM \to SM$ strikt monoton und mit dem Theorem von Wojtkowski folgt die Behauptung. □

Literatur

[1] Maciej P. Wojtkowksi: *Magnetic flows and Gaussian thermostats on manifolds of negative curvature*. Fundamenta Mathematicae Vol. 163, 2000

[2] Anatole Katok und Boris Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995

[3] Isadore M. Singer und John A. Thorpe: *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Springer, 1976