

# Krisen von chaotischen Attraktoren

Alexander Lohse

08.09.'08

# Gliederung

- 1 Grundlagen
  - Definitionen und Begriffe
  - Chaotische Attraktoren
- 2 Das Lorenz-System
  - Einfache Eigenschaften
  - Die erste homokline Explosion
- 3 Literatur

# Gliederung

- 1 Grundlagen
  - Definitionen und Begriffe
  - Chaotische Attraktoren
- 2 Das Lorenz-System
  - Einfache Eigenschaften
  - Die erste homokline Explosion
- 3 Literatur

# Attraktoren

## Definition:

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{T}$  eine Zeitmenge,  
 $\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  ein Fluss.

- Eine kompakte, invariante Menge  $K \subset X$  heißt *attraktiv*, falls es eine offene Menge  $U \subset X$  gibt, sodass für alle  $x \in U$  gilt  $\omega(x) \subset K$ .
- $K \subset X$  heißt *stabil*, falls es zu jeder Umgebung  $V \supset K$  eine Umgebung  $U \supset K$  gibt, sodass  $\forall x \in U : O^t(x) \subset V$ .
- Eine kompakte, invariante Menge heißt *Attraktor*, wenn sie attraktiv und stabil ist.

# Attraktoren

## Definition:

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{T}$  eine Zeitmenge,  
 $\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  ein Fluss.

- Eine kompakte, invariante Menge  $K \subset X$  heißt *attraktiv*, falls es eine offene Menge  $U \subset X$  gibt, sodass für alle  $x \in U$  gilt  $\omega(x) \subset K$ .
- $K \subset X$  heißt *stabil*, falls es zu jeder Umgebung  $V \supset K$  eine Umgebung  $U \supset K$  gibt, sodass  $\forall x \in U : O^t(x) \subset V$ .
- Eine kompakte, invariante Menge heißt *Attraktor*, wenn sie attraktiv und stabil ist.

# Attraktoren

## Definition:

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{T}$  eine Zeitmenge,  
 $\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  ein Fluss.

- Eine kompakte, invariante Menge  $K \subset X$  heißt *attraktiv*, falls es eine offene Menge  $U \subset X$  gibt, sodass für alle  $x \in U$  gilt  $\omega(x) \subset K$ .
- $K \subset X$  heißt *stabil*, falls es zu jeder Umgebung  $V \supset K$  eine Umgebung  $U \supset K$  gibt, sodass  $\forall x \in U : O^t(x) \subset V$ .
- Eine kompakte, invariante Menge heißt *Attraktor*, wenn sie attraktiv und stabil ist.

# Attraktoren

## Definition:

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{T}$  eine Zeitmenge,  
 $\phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  ein Fluss.

- Eine kompakte, invariante Menge  $K \subset X$  heißt *attraktiv*, falls es eine offene Menge  $U \subset X$  gibt, sodass für alle  $x \in U$  gilt  $\omega(x) \subset K$ .
- $K \subset X$  heißt *stabil*, falls es zu jeder Umgebung  $V \supset K$  eine Umgebung  $U \supset K$  gibt, sodass  $\forall x \in U : O^t(x) \subset V$ .
- Eine kompakte, invariante Menge heißt *Attraktor*, wenn sie attraktiv und stabil ist.

# Stabile Mannigfaltigkeit

## Definition:

Sei  $x_0 \in X$  ein kritischer Punkt eines dynamischen Systems mit Fluss  $\phi$ . Dann nennen wir

$$W_s(x_0) := \{x \in X \mid \phi(t, x) \rightarrow x_0 \text{ für } t \rightarrow \infty\}$$

$$W_u(x_0) := \{x \in X \mid \phi(t, x) \rightarrow x_0 \text{ für } t \rightarrow -\infty\}$$

die *stabile* und die *instabile* Mannigfaltigkeit von  $x_0$ .

# Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen

- Betrachte zwei fast identische Anfangsbedingungen für ein kontinuierliches, dynamisches System:

$$x_1(0) \text{ und } x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$$

- Das System *hängt exponentiell sensitiv von den Anfangsbedingungen ab*, falls die Orbits für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt bleiben und ein  $h > 0$  existiert, sodass

$$\frac{|\Delta(t)|}{|\Delta(0)|} \sim \exp(ht)$$

- Die Lösungen werden als beschränkt vorausgesetzt, damit triviale Fälle wie  $\dot{x} = x$  ausgeschlossen sind.

# Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen

- Betrachte zwei fast identische Anfangsbedingungen für ein kontinuierliches, dynamisches System:

$$x_1(0) \text{ und } x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$$

- Das System *hängt exponentiell sensitiv von den Anfangsbedingungen ab*, falls die Orbits für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt bleiben und ein  $h > 0$  existiert, sodass

$$\frac{|\Delta(t)|}{|\Delta(0)|} \sim \exp(ht)$$

- Die Lösungen werden als beschränkt vorausgesetzt, damit triviale Fälle wie  $\dot{x} = x$  ausgeschlossen sind.

# Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen

- Betrachte zwei fast identische Anfangsbedingungen für ein kontinuierliches, dynamisches System:

$$x_1(0) \text{ und } x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$$

- Das System *hängt exponentiell sensitiv von den Anfangsbedingungen ab*, falls die Orbits für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt bleiben und ein  $h > 0$  existiert, sodass

$$\frac{|\Delta(t)|}{|\Delta(0)|} \sim \exp(ht)$$

- Die Lösungen werden als beschränkt vorausgesetzt, damit triviale Fälle wie  $\dot{x} = x$  ausgeschlossen sind.

# Das Beschattungslemma

- Kann man dann einen Computer überhaupt sinnvoll einsetzen, um chaotisches Verhalten zu untersuchen?
- Will man die Bahn eines Startpunktes  $x_0$  berechnen, so beginnt man tatsächlich mit einem leicht abweichenden Punkt  $y_0$ , der Fehler verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt...
- Aber, es gibt das Beschattungslemma:  
Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $z_0$  nahe bei  $x_0$ , sodass die wahre Bahn von  $z_0$  nie weiter als  $\varepsilon$  von der fehlerhaft berechneten Bahn von  $x_0$  abweicht.
- Die fehlerbehaftete Bahn von  $x_0$  gibt also trotzdem einen wahren Einblick in die Dynamik des Systems.

# Das Beschattungslemma

- Kann man dann einen Computer überhaupt sinnvoll einsetzen, um chaotisches Verhalten zu untersuchen?
- Will man die Bahn eines Startpunktes  $x_0$  berechnen, so beginnt man tatsächlich mit einem leicht abweichenden Punkt  $y_0$ , der Fehler verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt...
- Aber, es gibt das Beschattungslemma:  
Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $z_0$  nahe bei  $x_0$ , sodass die wahre Bahn von  $z_0$  nie weiter als  $\varepsilon$  von der fehlerhaft berechneten Bahn von  $x_0$  abweicht.
- Die fehlerbehaftete Bahn von  $x_0$  gibt also trotzdem einen wahren Einblick in die Dynamik des Systems.

# Das Beschattungslemma

- Kann man dann einen Computer überhaupt sinnvoll einsetzen, um chaotisches Verhalten zu untersuchen?
- Will man die Bahn eines Startpunktes  $x_0$  berechnen, so beginnt man tatsächlich mit einem leicht abweichenden Punkt  $y_0$ , der Fehler verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt...
- Aber, es gibt das Beschattungslemma:  
Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $z_0$  nahe bei  $x_0$ , sodass die wahre Bahn von  $z_0$  nie weiter als  $\varepsilon$  von der fehlerhaft berechneten Bahn von  $x_0$  abweicht.
- Die fehlerbehaftete Bahn von  $x_0$  gibt also trotzdem einen wahren Einblick in die Dynamik des Systems.

# Das Beschattungslemma

- Kann man dann einen Computer überhaupt sinnvoll einsetzen, um chaotisches Verhalten zu untersuchen?
- Will man die Bahn eines Startpunktes  $x_0$  berechnen, so beginnt man tatsächlich mit einem leicht abweichenden Punkt  $y_0$ , der Fehler verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt...
- Aber, es gibt das Beschattungslemma:  
Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $z_0$  nahe bei  $x_0$ , sodass die wahre Bahn von  $z_0$  nie weiter als  $\varepsilon$  von der fehlerhaft berechneten Bahn von  $x_0$  abweicht.
- Die fehlerbehaftete Bahn von  $x_0$  gibt also trotzdem einen wahren Einblick in die Dynamik des Systems.

# Das Beschattungslemma

- Kann man dann einen Computer überhaupt sinnvoll einsetzen, um chaotisches Verhalten zu untersuchen?
- Will man die Bahn eines Startpunktes  $x_0$  berechnen, so beginnt man tatsächlich mit einem leicht abweichenden Punkt  $y_0$ , der Fehler verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt...
- Aber, es gibt das Beschattungslemma:  
Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $z_0$  nahe bei  $x_0$ , sodass die wahre Bahn von  $z_0$  nie weiter als  $\varepsilon$  von der fehlerhaft berechneten Bahn von  $x_0$  abweicht.
- Die fehlerbehaftete Bahn von  $x_0$  gibt also trotzdem einen wahren Einblick in die Dynamik des Systems.

# Das Beschattungslemma

- Kann man dann einen Computer überhaupt sinnvoll einsetzen, um chaotisches Verhalten zu untersuchen?
- Will man die Bahn eines Startpunktes  $x_0$  berechnen, so beginnt man tatsächlich mit einem leicht abweichenden Punkt  $y_0$ , der Fehler verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt...
- Aber, es gibt das Beschattungslemma:  
Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $z_0$  nahe bei  $x_0$ , sodass die wahre Bahn von  $z_0$  nie weiter als  $\varepsilon$  von der fehlerhaft berechneten Bahn von  $x_0$  abweicht.
- Die fehlerbehaftete Bahn von  $x_0$  gibt also trotzdem einen wahren Einblick in die Dynamik des Systems.

# Das Beschattungslemma

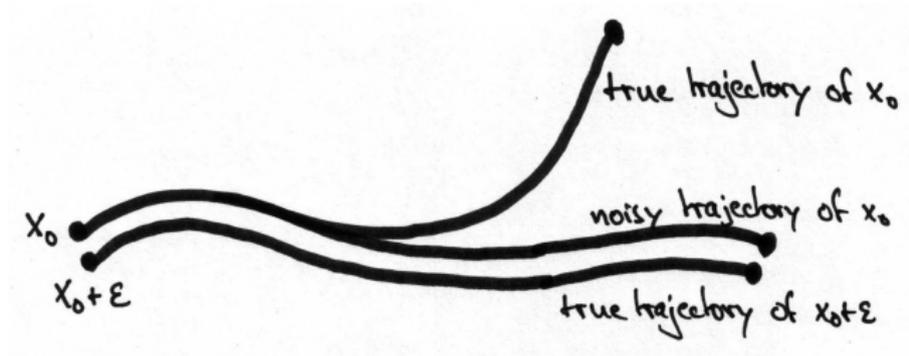


Abbildung: Beschattung

# Fraktale Dimension

- Überdecke den  $\mathbb{R}^n$  mit Würfeln der Kantenlänge  $\varepsilon$  und definiere für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ihre *Boxdimension* durch

$$D_0(M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}$$

wobei  $N(\varepsilon)$  die Anzahl der Würfel ist, die Punkte aus  $M$  enthalten.

- Für elementargeometrische Mengen wie Punkte, Geraden und Flächen stimmt die Boxdimension mit unserem üblichen Dimensionsbegriff überein.
- Beispiel für eine Menge mit nichtganzzahliger Dimension: Cantormenge

# Fraktale Dimension

- Überdecke den  $\mathbb{R}^n$  mit Würfeln der Kantenlänge  $\varepsilon$  und definiere für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ihre *Boxdimension* durch

$$D_0(M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}$$

wobei  $N(\varepsilon)$  die Anzahl der Würfel ist, die Punkte aus  $M$  enthalten.

- Für elementargeometrische Mengen wie Punkte, Geraden und Flächen stimmt die Boxdimension mit unserem üblichen Dimensionsbegriff überein.
- Beispiel für eine Menge mit nichtganzzahliger Dimension: Cantormenge

# Fraktale Dimension

- Überdecke den  $\mathbb{R}^n$  mit Würfeln der Kantenlänge  $\varepsilon$  und definiere für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ihre *Boxdimension* durch

$$D_0(M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}$$

wobei  $N(\varepsilon)$  die Anzahl der Würfel ist, die Punkte aus  $M$  enthalten.

- Für elementargeometrische Mengen wie Punkte, Geraden und Flächen stimmt die Boxdimension mit unserem üblichen Dimensionsbegriff überein.
- Beispiel für eine Menge mit nichtganzzahliger Dimension: Cantormenge

# Gliederung

- 1 Grundlagen
  - Definitionen und Begriffe
  - **Chaotische Attraktoren**
- 2 Das Lorenz-System
  - Einfache Eigenschaften
  - Die erste homokline Explosion
- 3 Literatur

# Chaotische und merkwürdige Attraktoren

## Definition:

- Ein Attraktor heißt *chaotisch*, wenn er exponentielle Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen aufweist.  
(→ Dynamik des Systems)
- Ein Attraktor heißt *merkwürdig* oder *seltsam*, wenn seine Dimension keine ganze Zahl ist.  
(→ geometrische Struktur des Attraktors)

# Chaotische und merkwürdige Attraktoren

## Definition:

- Ein Attraktor heißt *chaotisch*, wenn er exponentielle Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen aufweist.  
(→ Dynamik des Systems)
- Ein Attraktor heißt *merkwürdig* oder *seltsam*, wenn seine Dimension keine ganze Zahl ist.  
(→ geometrische Struktur des Attraktors)

# Verschiedene Wege ins Chaos

Viele Wege führen ins Chaos...

- Periodenverdoppelung
- Intermittenz
- Krisen von Attraktoren

# Verschiedene Wege ins Chaos

Viele Wege führen ins Chaos...

- Periodenverdoppelung
- Intermittenz
- Krisen von Attraktoren

# Verschiedene Wege ins Chaos

Viele Wege führen ins Chaos...

- Periodenverdoppelung
- Intermittenz
- Krisen von Attraktoren

# Verschiedene Wege ins Chaos

Viele Wege führen ins Chaos...

- Periodenverdoppelung
- Intermittenz
- Krisen von Attraktoren

# Verschiedene Wege ins Chaos

Viele Wege führen ins Chaos...

- Periodenverdoppelung
- Intermittenz
- Krisen von Attraktoren

# Verschiedene Wege ins Chaos

Viele Wege führen ins Chaos...

- Periodenverdoppelung
- Intermittenz
- Krisen von Attraktoren

# Ein Beispiel für Intermittenz

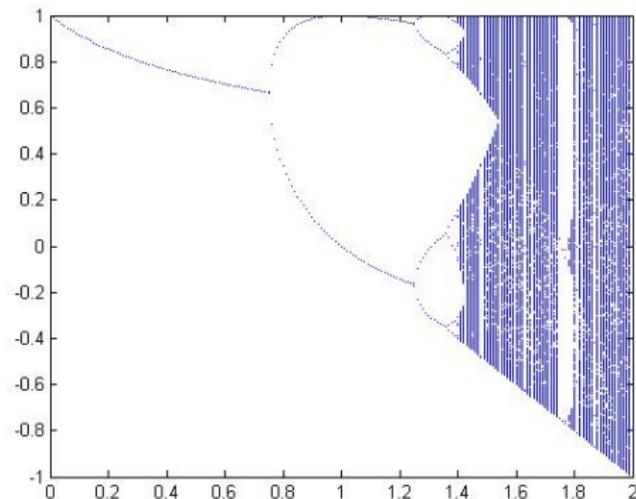


Abbildung: Feigenbaumdiagramm

# Krisen von Attraktoren

Unter einer *Krise eines (chaotischen) Attraktors* versteht man eine plötzliche Strukturänderung des Attraktors bei Überschreiten eines kritischen Parameterwertes. Eine Krise tritt auf, wenn ein Attraktor mit einem instabilen, periodischen Orbits oder dessen stabiler Mannigfaltigkeit kollidiert. Man unterscheidet verschiedene Arten von Krisen:

- Plötzliches Verschwinden oder Auftauchen eines Attraktors (Randkrise)
- Plötzliche Größenänderung eines Attraktors (innere Krise)
- Mehrere Attraktoren verschmelzen miteinander oder ein Attraktor teilt sich in mehrere (Mischungskrise)

# Krisen von Attraktoren

Unter einer *Krise eines (chaotischen) Attraktors* versteht man eine plötzliche Strukturänderung des Attraktors bei Überschreiten eines kritischen Parameterwertes. Eine Krise tritt auf, wenn ein Attraktor mit einem instabilen, periodischen Orbits oder dessen stabiler Mannigfaltigkeit kollidiert. Man unterscheidet verschiedene Arten von Krisen:

- Plötzliches Verschwinden oder Auftauchen eines Attraktors (Randkrise)
- Plötzliche Größenänderung eines Attraktors (innere Krise)
- Mehrere Attraktoren verschmelzen miteinander oder ein Attraktor teilt sich in mehrere (Mischungskrise)

# Krisen von Attraktoren

Unter einer *Krise eines (chaotischen) Attraktors* versteht man eine plötzliche Strukturänderung des Attraktors bei Überschreiten eines kritischen Parameterwertes. Eine Krise tritt auf, wenn ein Attraktor mit einem instabilen, periodischen Orbits oder dessen stabiler Mannigfaltigkeit kollidiert. Man unterscheidet verschiedene Arten von Krisen:

- Plötzliches Verschwinden oder Auftauchen eines Attraktors (Randkrise)
- Plötzliche Größenänderung eines Attraktors (innere Krise)
- Mehrere Attraktoren verschmelzen miteinander oder ein Attraktor teilt sich in mehrere (Mischungskrise)

# Krisen von Attraktoren

Unter einer *Krise eines (chaotischen) Attraktors* versteht man eine plötzliche Strukturänderung des Attraktors bei Überschreiten eines kritischen Parameterwertes. Eine Krise tritt auf, wenn ein Attraktor mit einem instabilen, periodischen Orbits oder dessen stabiler Mannigfaltigkeit kollidiert. Man unterscheidet verschiedene Arten von Krisen:

- Plötzliches Verschwinden oder Auftauchen eines Attraktors (Randkrise)
- Plötzliche Größenänderung eines Attraktors (innere Krise)
- Mehrere Attraktoren verschmelzen miteinander oder ein Attraktor teilt sich in mehrere (Mischungskrise)

# Gliederung

- 1 Grundlagen
  - Definitionen und Begriffe
  - Chaotische Attraktoren
- 2 Das Lorenz-System
  - Einfache Eigenschaften
  - Die erste homokline Explosion
- 3 Literatur

# Die Lorenz-Gleichungen

Das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird als Lorenz-System bezeichnet:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \quad (1)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (2)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (3)$$

Dabei sind  $\sigma, r, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , üblicherweise werden die Parameter  $\sigma = 10$  und  $b = \frac{8}{3}$  festgelegt,  $r$  wird variiert.

# Dissipation

Definition: Ein System heißt *dissipativ*, falls eine beschränkte Teilmenge  $B \subset X$ , existiert, sodass

$$\forall x_0 \in X \exists t_0 : \phi(t, x) \in B \forall t > t_0$$

Behauptung: Das Lorenz-System ist dissipativ.

Beweis:

- Wir betrachten die Ljapunov-Funktion

$$V = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(Z - 2r)^2$$

- und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2r\dot{X}X + 2\sigma\dot{Y}Y + 2\sigma(Z - 2r)\dot{Z} \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - brZ) \end{aligned}$$

# Dissipation

Definition: Ein System heißt *dissipativ*, falls eine beschränkte Teilmenge  $B \subset X$ , existiert, sodass

$$\forall x_0 \in X \exists t_0 : \phi(t, x) \in B \forall t > t_0$$

**Behauptung:** Das Lorenz-System ist dissipativ.

Beweis:

- Wir betrachten die Ljapunov-Funktion

$$V = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(Z - 2r)^2$$

- und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2r\dot{X}X + 2\sigma\dot{Y}Y + 2\sigma(Z - 2r)\dot{Z} \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - brZ) \end{aligned}$$

# Dissipation

Definition: Ein System heißt *dissipativ*, falls eine beschränkte Teilmenge  $B \subset X$ , existiert, sodass

$$\forall x_0 \in X \exists t_0 : \phi(t, x) \in B \forall t > t_0$$

Behauptung: Das Lorenz-System ist dissipativ.

Beweis:

- Wir betrachten die Ljapunov-Funktion

$$V = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(Z - 2r)^2$$

- und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2r\dot{X}X + 2\sigma\dot{Y}Y + 2\sigma(Z - 2r)\dot{Z} \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - brZ) \end{aligned}$$

# Dissipation

Definition: Ein System heißt *dissipativ*, falls eine beschränkte Teilmenge  $B \subset X$ , existiert, sodass

$$\forall x_0 \in X \exists t_0 : \phi(t, x) \in B \forall t > t_0$$

Behauptung: Das Lorenz-System ist dissipativ.

Beweis:

- Wir betrachten die Ljapunov-Funktion

$$V = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(Z - 2r)^2$$

- und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2r\dot{X}X + 2\sigma\dot{Y}Y + 2\sigma(Z - 2r)\dot{Z} \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - brZ)\end{aligned}$$

## ...weiter im Beweis

- Definiere  $D$  durch  $x \in D \Leftrightarrow \dot{V}(x) \geq 0$  und setze
$$c := \max \{V(x) | x \in D\}$$
- Sei  $E$  nun das Ellipsoid, das durch  $V \leq c + \varepsilon$  definiert wird.
- Dann folgt für  $x \notin E$  auch  $x \notin D$  und somit  $\dot{V}(x) \leq -\delta$  für ein  $\delta \geq 0$ .  
Damit ist der Beweis erbracht.

## ...weiter im Beweis

- Definiere  $D$  durch  $x \in D \Leftrightarrow \dot{V}(x) \geq 0$  und setze
$$c := \max \{V(x) | x \in D\}$$
- Sei  $E$  nun das Ellipsoid, das durch  $V \leq c + \varepsilon$  definiert wird.
- Dann folgt für  $x \notin E$  auch  $x \notin D$  und somit  $\dot{V}(x) \leq -\delta$  für ein  $\delta \geq 0$ .  
Damit ist der Beweis erbracht.

## ...weiter im Beweis

- Definiere  $D$  durch  $x \in D \Leftrightarrow \dot{V}(x) \geq 0$  und setze
$$c := \max \{V(x) | x \in D\}$$
- Sei  $E$  nun das Ellipsoid, das durch  $V \leq c + \varepsilon$  definiert wird.
- Dann folgt für  $x \notin E$  auch  $x \notin D$  und somit  $\dot{V}(x) \leq -\delta$  für ein  $\delta \geq 0$ .  
Damit ist der Beweis erbracht.

# Ruhelagen

Das Lorenzsystem besitzt drei Ruhelagen:

$$O := (0, 0, 0)$$

$$C_1 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C_2 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

- Die triviale Ruhelage ist stabil genau dann, wenn  $r \leq 1$ .
- $C_1$  und  $C_2$  existieren erst ab  $r \geq 1$ .
- Die Eigenwerte der Linearisierung sind  $-b$  und ein Paar komplex konjugierter. Letztere haben negativen Realteil solange  $r \leq \frac{470}{19} \approx 24,74$ , dann überschreiten sie die imaginäre Achse und  $C_1$  und  $C_2$  verlieren ihre Stabilität.
- Es findet also eine Hopf-Bifurkation statt.

# Ruhelagen

Das Lorenzsystem besitzt drei Ruhelagen:

$$O := (0, 0, 0)$$

$$C_1 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C_2 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

- Die triviale Ruhelage ist stabil genau dann, wenn  $r \leq 1$ .
- $C_1$  und  $C_2$  existieren erst ab  $r \geq 1$ .
- Die Eigenwerte der Linearisierung sind  $-b$  und ein Paar komplex konjugierter. Letztere haben negativen Realteil solange  $r \leq \frac{470}{19} \approx 24,74$ , dann überschreiten sie die imaginäre Achse und  $C_1$  und  $C_2$  verlieren ihre Stabilität.
- Es findet also eine Hopf-Bifurkation statt.

# Ruhelagen

Das Lorenzsystem besitzt drei Ruhelagen:

$$O := (0, 0, 0)$$

$$C_1 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C_2 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

- Die triviale Ruhelage ist stabil genau dann, wenn  $r \leq 1$ .
- $C_1$  und  $C_2$  existieren erst ab  $r \geq 1$ .
- Die Eigenwerte der Linearisierung sind  $-b$  und ein Paar komplex konjugierter. Letztere haben negativen Realteil solange  $r \leq \frac{470}{19} \approx 24,74$ , dann überschreiten sie die imaginäre Achse und  $C_1$  und  $C_2$  verlieren ihre Stabilität.
- Es findet also eine Hopf-Bifurkation statt.

# Ruhelagen

Das Lorenzsystem besitzt drei Ruhelagen:

$$O := (0, 0, 0)$$

$$C_1 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C_2 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

- Die triviale Ruhelage ist stabil genau dann, wenn  $r \leq 1$ .
- $C_1$  und  $C_2$  existieren erst ab  $r \geq 1$ .
- Die Eigenwerte der Linearisierung sind  $-b$  und ein Paar komplex konjugierter. Letztere haben negativen Realteil solange  $r \leq \frac{470}{19} \approx 24,74$ , dann überschreiten sie die imaginäre Achse und  $C_1$  und  $C_2$  verlieren ihre Stabilität.
- Es findet also eine Hopf-Bifurkation statt.

# Ruhelagen

Das Lorenzsystem besitzt drei Ruhelagen:

$$O := (0, 0, 0)$$

$$C_1 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C_2 := (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

- Die triviale Ruhelage ist stabil genau dann, wenn  $r \leq 1$ .
- $C_1$  und  $C_2$  existieren erst ab  $r \geq 1$ .
- Die Eigenwerte der Linearisierung sind  $-b$  und ein Paar komplex konjugierter. Letztere haben negativen Realteil solange  $r \leq \frac{470}{19} \approx 24,74$ , dann überschreiten sie die imaginäre Achse und  $C_1$  und  $C_2$  verlieren ihre Stabilität.
- Es findet also eine Hopf-Bifurkation statt.

# Fragen...

Diese Ergebnisse führen uns zu folgenden Fragen:

- Wo kommen die instabilen, periodischen Orbits her, die an der Hopf-Bifurkation beteiligt sind?
- Wohin laufen die Trajektorien, wenn alle drei Fixpunkte instabil geworden sind, sie aber trotzdem beschränkt bleiben?

# Fragen...

Diese Ergebnisse führen uns zu folgenden Fragen:

- Wo kommen die instabilen, periodischen Orbits her, die an der Hopf-Bifurkation beteiligt sind?
- Wohin laufen die Trajektorien, wenn alle drei Fixpunkte instabil geworden sind, sie aber trotzdem beschränkt bleiben?

# Fragen...

Diese Ergebnisse führen uns zu folgenden Fragen:

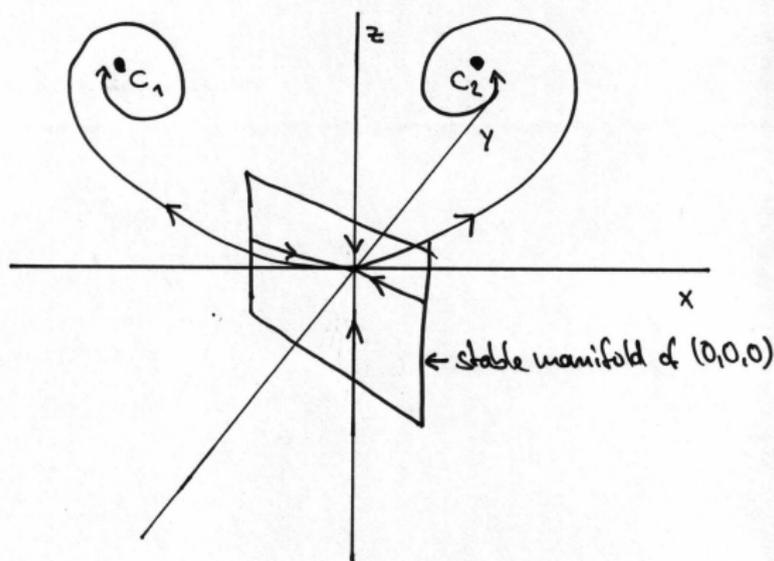
- Wo kommen die instabilen, periodischen Orbits her, die an der Hopf-Bifurkation beteiligt sind?
- Wohin laufen die Trajektorien, wenn alle drei Fixpunkte instabil geworden sind, sie aber trotzdem beschränkt bleiben?

# Gliederung

- 1 Grundlagen
  - Definitionen und Begriffe
  - Chaotische Attraktoren
- 2 Das Lorenz-System
  - Einfache Eigenschaften
  - Die erste homokline Explosion
- 3 Literatur

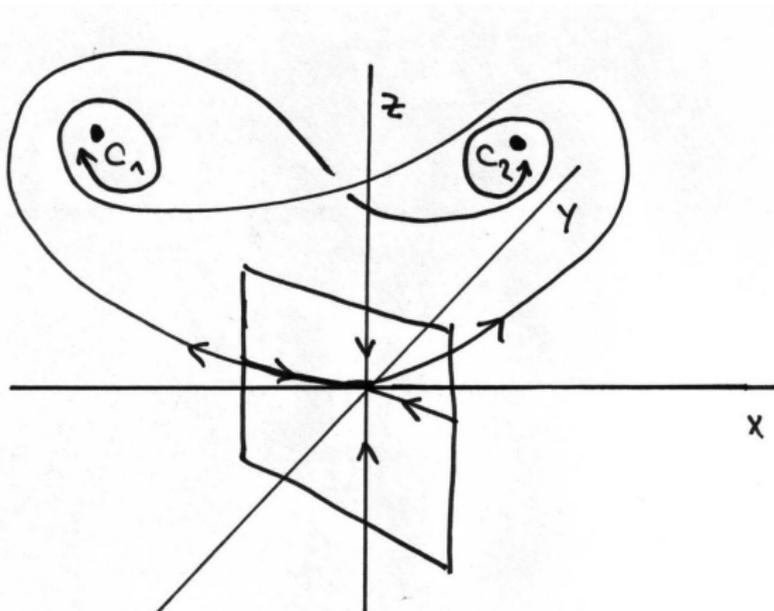
## Existenz eines homoklinen Orbits

Für  $r > 1$  zerlegt die stabile Mannigfaltigkeit von  $O$  den Raum zunächst in zwei Halbräume, sodass die Trajektorien aus dem einen Halbraum zu  $C_1$  und die aus dem anderen zu  $C_2$  laufen.



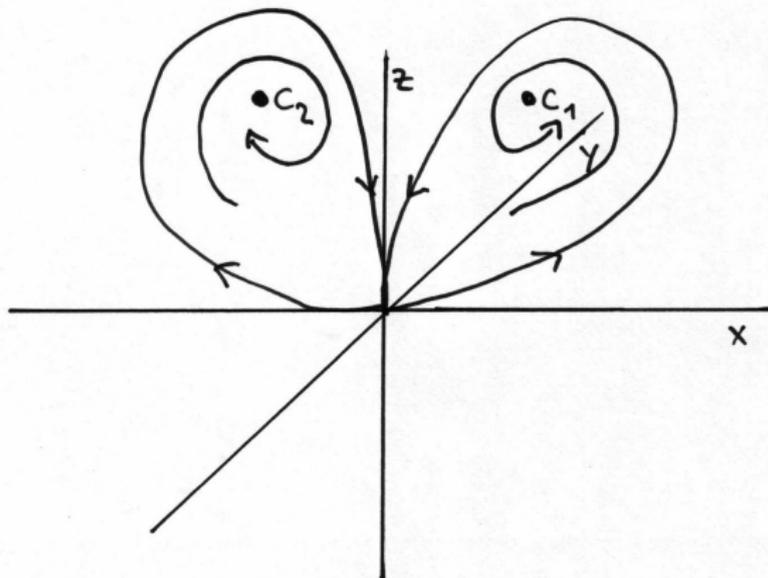
# Existenz eines homoklinen Orbits

Für wachsendes  $r$  durchlaufen die Trajektorien immer größere Spiralen bis sie schließlich die Seite wechseln und zum anderen Fixpunkt laufen.



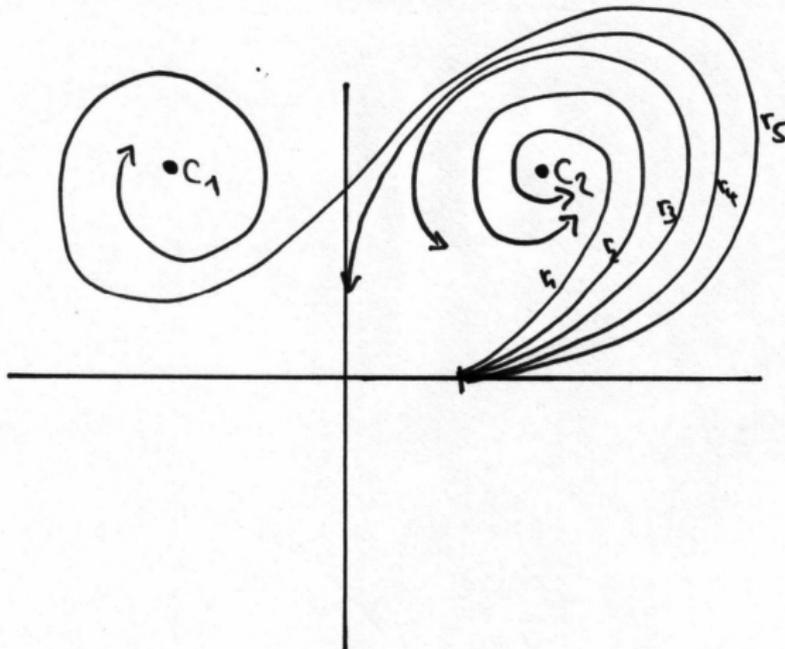
# Existenz eines homoklinen Orbits

Daraus folgt die Existenz eines homoklinen Orbits für einen Parameterwert  $r' \approx 13,926$  aus der Stetigkeit des Systems:



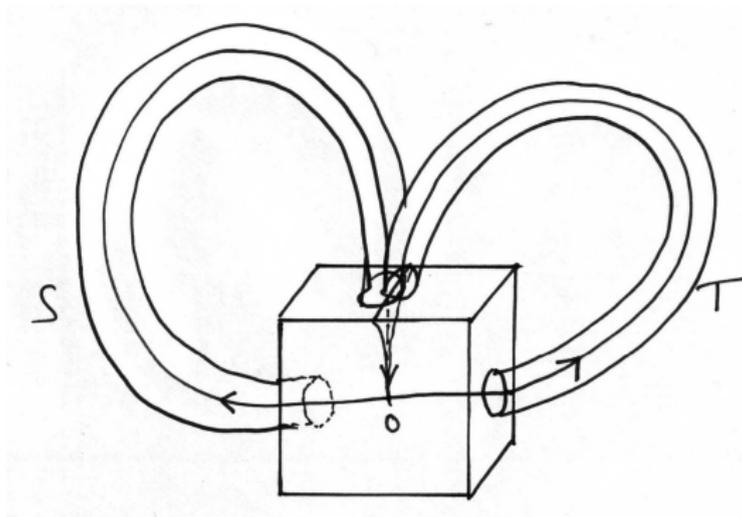
# Existenz eines homoklinen Orbits

Daraus folgt die Existenz eines homoklinen Orbits für einen Parameterwert  $r' \approx 13,926$  aus der Stetigkeit des Systems:



# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

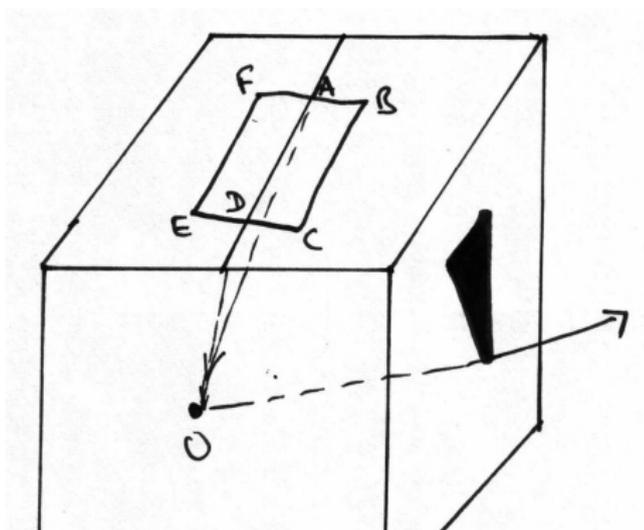
Nun betrachten wir eine kleine Umgebung des homoklinen Orbits und fragen: Gibt es Trajektorien, die für  $r$  nahe bei  $r'$  immer in dieser Umgebung bleiben?



# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

Nun betrachten wir eine kleine Umgebung des homoklinen Orbits und fragen: Gibt es Trajektorien, die für  $r$  nahe bei  $r'$  immer in dieser Umgebung bleiben?

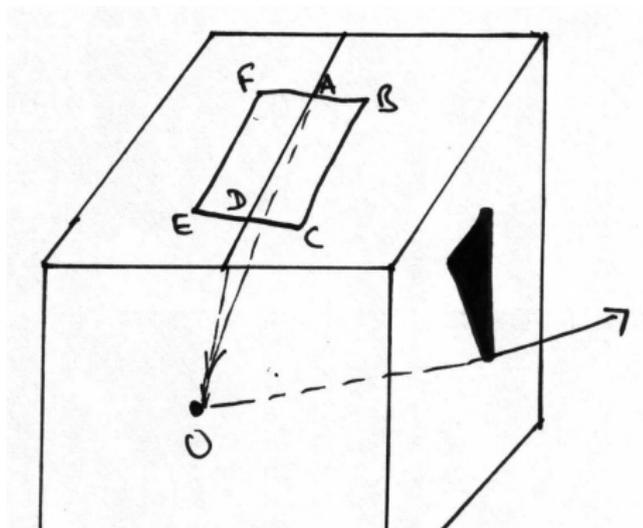
- Wir betrachten dazu die Wiederkehrabbildung für die Oberseite des Würfels:



# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

Nun betrachten wir eine kleine Umgebung des homoklinen Orbits und fragen: Gibt es Trajektorien, die für  $r$  nahe bei  $r'$  immer in dieser Umgebung bleiben?

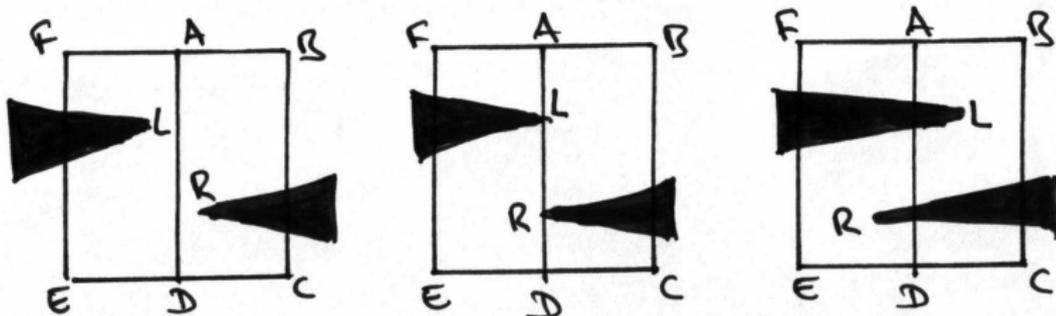
- Wir betrachten dazu die Wiederkehrabbildung für die Oberseite des Würfels:



# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

Nun betrachten wir eine kleine Umgebung des homoklinen Orbits und fragen: Gibt es Trajektorien, die für  $r$  nahe bei  $r'$  immer in dieser Umgebung bleiben?

- Wir betrachten dazu die Wiederkehrabbildung für die Oberseite des Würfels:



# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Im ersten Bild läuft jede Trajektorie langfristig aus unserer Umgebung raus.
- Gleiches gilt für das zweite Bild mit Ausnahme des homoklinen Orbits selbst.
- Beim dritten Bild wird es interessant:  
Es existiert eine seltsame, invariante Menge, bestehend aus abzählbar vielen periodischen, überabzählbar vielen aperiodischen und ebenfalls überabzählbar vielen Trajektorien, die im Ursprung enden.
- Die Schnittmenge der invarianten Menge mit der Oberfläche des Würfels entspricht dem kartesischen Produkt zweier Cantormengen.

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Im ersten Bild läuft jede Trajektorie langfristig aus unserer Umgebung raus.
- Gleiches gilt für das zweite Bild mit Ausnahme des homoklinen Orbits selbst.
- Beim dritten Bild wird es interessant:  
Es existiert eine seltsame, invariante Menge, bestehend aus abzählbar vielen periodischen, überabzählbar vielen aperiodischen und ebenfalls überabzählbar vielen Trajektorien, die im Ursprung enden.
- Die Schnittmenge der invarianten Menge mit der Oberfläche des Würfels entspricht dem kartesischen Produkt zweier Cantormengen.

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Im ersten Bild läuft jede Trajektorie langfristig aus unserer Umgebung raus.
- Gleiches gilt für das zweite Bild mit Ausnahme des homoklinen Orbits selbst.
- Beim dritten Bild wird es interessant:  
Es existiert eine seltsame, invariante Menge, bestehend aus abzählbar vielen periodischen, überabzählbar vielen aperiodischen und ebenfalls überabzählbar vielen Trajektorien, die im Ursprung enden.
- Die Schnittmenge der invarianten Menge mit der Oberfläche des Würfels entspricht dem kartesischen Produkt zweier Cantormengen.

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Im ersten Bild läuft jede Trajektorie langfristig aus unserer Umgebung raus.
- Gleiches gilt für das zweite Bild mit Ausnahme des homoklinen Orbits selbst.
- Beim dritten Bild wird es interessant:  
Es existiert eine seltsame, invariante Menge, bestehend aus abzählbar vielen periodischen, überabzählbar vielen aperiodischen und ebenfalls überabzählbar vielen Trajektorien, die im Ursprung enden.
- Die Schnittmenge der invarianten Menge mit der Oberfläche des Würfels entspricht dem kartesischen Produkt zweier Cantormengen.

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Wir sortieren die Trajektorien der invarianten Menge, indem wir (vorwärts und rückwärts) festhalten, in welcher Reihenfolge sie die Schläuche T und S durchlaufen.
- Tatsächlich besteht sogar eine Bijektion zwischen den Trajektorien und linksunendlichen Folgen von T und S.
- Damit sollte dann auch klar sein, warum man von einer homoklinen Explosion spricht...

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Wir sortieren die Trajektorien der invarianten Menge, indem wir (vorwärts und rückwärts) festhalten, in welcher Reihenfolge sie die Schläuche T und S durchlaufen.
- Tatsächlich besteht sogar eine Bijektion zwischen den Trajektorien und linksunendlichen Folgen von T und S.
- Damit sollte dann auch klar sein, warum man von einer homoklinen Explosion spricht...

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

- Wir sortieren die Trajektorien der invarianten Menge, indem wir (vorwärts und rückwärts) festhalten, in welcher Reihenfolge sie die Schläuche T und S durchlaufen.
- Tatsächlich besteht sogar eine Bijektion zwischen den Trajektorien und linksunendlichen Folgen von T und S.
- Damit sollte dann auch klar sein, warum man von einer homoklinen Explosion spricht...

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

Wir können nun die Antworten auf unsere Fragen von vorhin zumindest vermuten:

- Die beiden einfachsten Orbits in der invarianten Menge,  $T$  und  $S$ , sind Kandidaten für die instabilen, periodischen Orbits, die bei der Hopfverzweigung mit den Fixpunkten verschmelzen.
- Die seltsame, invariante Menge könnte zum Attraktor werden, wenn alle Fixpunkte instabil sind.

# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

Wir können nun die Antworten auf unsere Fragen von vorhin zumindest vermuten:

- Die beiden einfachsten Orbits in der invarianten Menge,  $T$  und  $S$ , sind Kandidaten für die instabilen, periodischen Orbits, die bei der Hopfverzweigung mit den Fixpunkten verschmelzen.
- Die seltsame, invariante Menge könnte zum Attraktor werden, wenn alle Fixpunkte instabil sind.

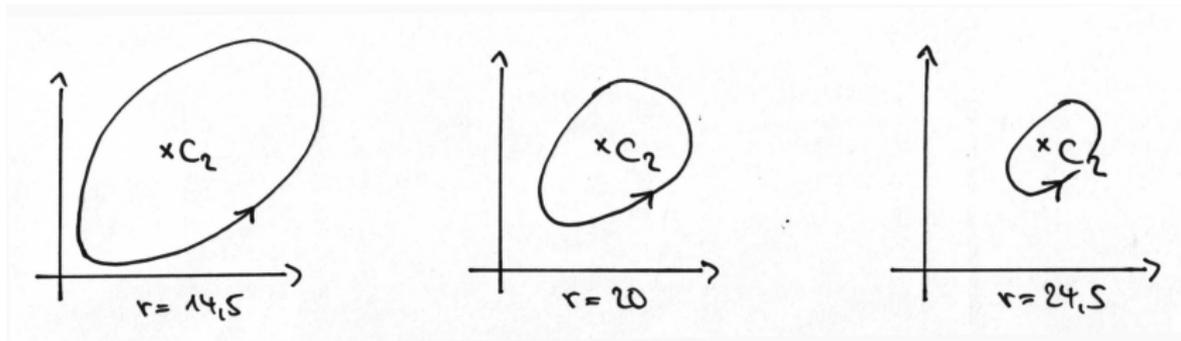
# Existenz einer seltsamen, invarianten Menge

Wir können nun die Antworten auf unsere Fragen von vorhin zumindest vermuten:

- Die beiden einfachsten Orbits in der invarianten Menge,  $T$  und  $S$ , sind Kandidaten für die instabilen, periodischen Orbits, die bei der Hopfverzweigung mit den Fixpunkten verschmelzen.
- Die seltsame, invariante Menge könnte zum Attraktor werden, wenn alle Fixpunkte instabil sind.

# Die Hopf-Bifurkation

Numerisch können wir die erste Vermutung schnell bestätigen:



# Ein merkwürdiger Attraktor?

## Entsteht tatsächlich ein merkwürdiger Attraktor?

- Achtung: Existenz der seltsamen, invarianten Menge nur für  $r$  nahe bei  $r'$  nachgewiesen
- Für  $r > r'$  erstellen wir numerisch eine Wiederkehrabbildung in der Ebene  $z = r - 1$ :

# Ein merkwürdiger Attraktor?

Entsteht tatsächlich ein merkwürdiger Attraktor?

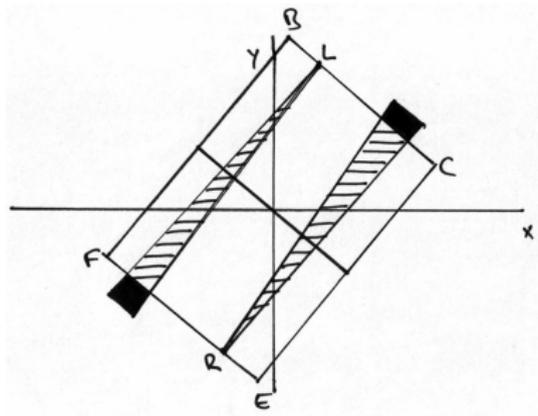
- Achtung: Existenz der seltsamen, invarianten Menge nur für  $r$  nahe bei  $r'$  nachgewiesen
- Für  $r > r'$  erstellen wir numerisch eine Wiederkehrabbildung in der Ebene  $z = r - 1$ :

# Ein merkwürdiger Attraktor?

Entsteht tatsächlich ein merkwürdiger Attraktor?

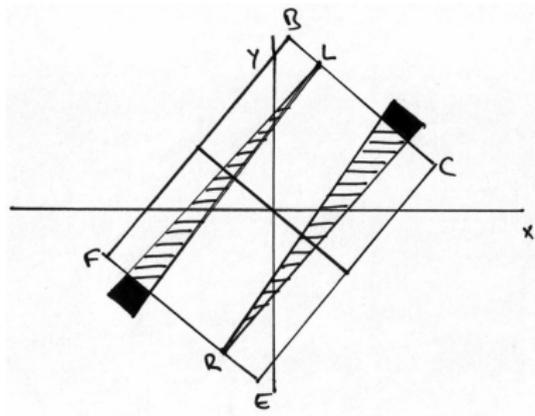
- Achtung: Existenz der seltsamen, invarianten Menge nur für  $r$  nahe bei  $r'$  nachgewiesen
- Für  $r > r'$  erstellen wir numerisch eine Wiederkehrabbildung in der Ebene  $z = r - 1$ :

# Ein merkwürdiger Attraktor?



Die schwarz markierten 'Fluchtbereiche' aus denen  $BCEF$  verlassen wird werden mit wachsendem  $r$  immer kleiner.

# Ein merkwürdiger Attraktor?



Die schwarz markierten 'Fluchtbereiche' aus denen  $BCEF$  verlassen wird werden mit wachsendem  $r$  immer kleiner.

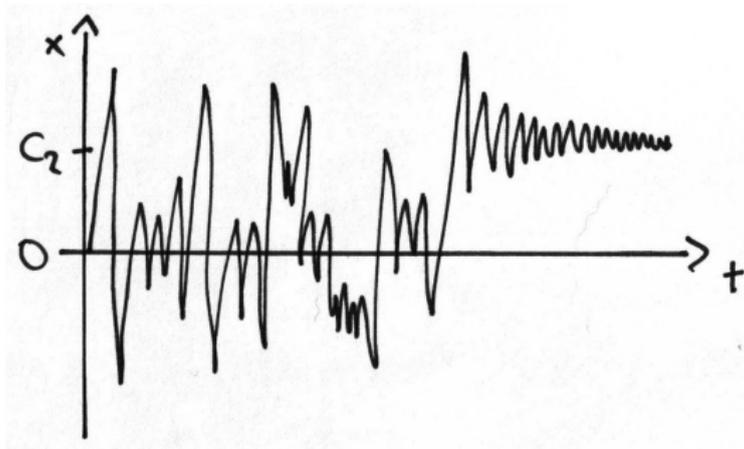


Abbildung: Präturbulenz

- Die 'Wanderzeit' geht gegen unendlich, wenn  $r$  sich einem weiteren kritischen Wert  $r^* = 24,06\dots$  nähert.
- Die invariante Menge wird zum Attraktor.
- Es existieren also in einem kleinen Parameterbereich drei Attraktoren.

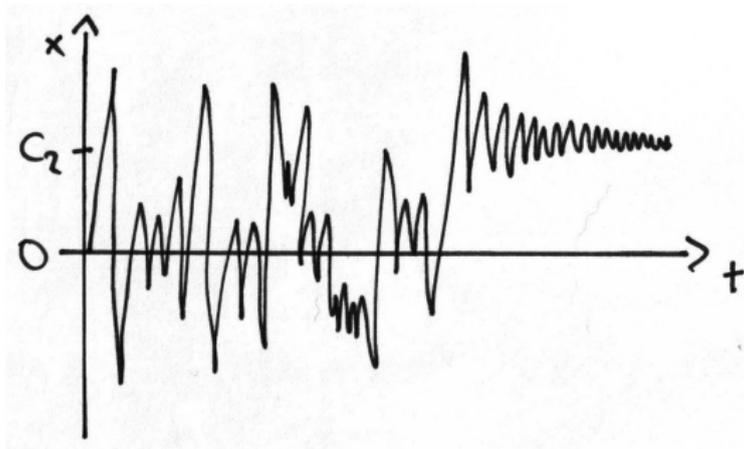


Abbildung: Präturbulenz

- Die 'Wanderzeit' geht gegen unendlich, wenn  $r$  sich einem weiteren kritischen Wert  $r^* = 24,06\dots$  nähert.
- Die invariante Menge wird zum Attraktor.
- Es existieren also in einem kleinen Parameterbereich drei Attraktoren.

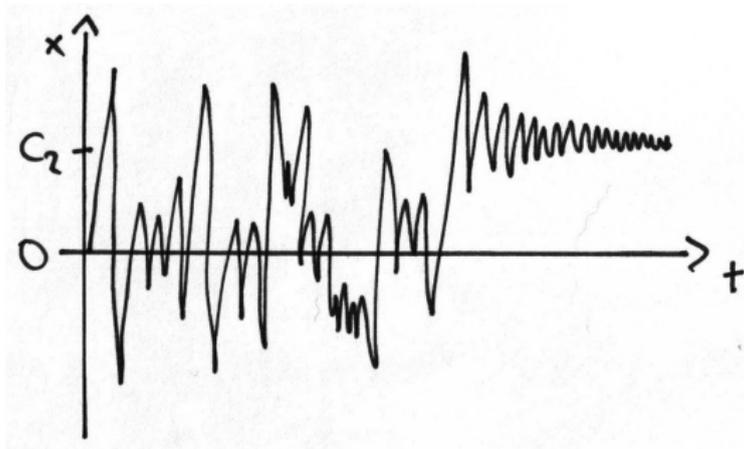


Abbildung: Präturbulenz

- Die 'Wanderzeit' geht gegen unendlich, wenn  $r$  sich einem weiteren kritischen Wert  $r^* = 24,06\dots$  nähert.
- Die invariante Menge wird zum Attraktor.
- Es existieren also in einem kleinen Parameterbereich drei Attraktoren.

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...

# Literaturangaben

- Edward Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (2002)
- Colin Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (1983)
- Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963)
- Wang, Abed, Hamdan: *Is Voltage Collapse Triggered by the Boundary Crisis of a Strange Attractor?* (1992)
- James Gleick: *Chaos - Making A New Science* (1987)
- Benoit Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur* (1977)
- ...