topologische Methoden
Seminar und Dynamische Systeme und gewöhnliche Differentialgleichungen
Maasholm 27.08.07 – 31.08.07

Richard Rösler

20.08.2007

1 Freie Gruppen

Wenn wir aus einer vorgelegten Familie $(G_j)_{j\in J}$ von nicht notwendigerweise abelschen Gruppen das kartesische Produkt $\prod_{j\in J} G_j$ bilden, so erhalten wir eine Gruppe, die alle G_j als Untergruppen enthält, in der aber Elemente aus verschiedenen Untergruppen miteinander kommutieren, auch wenn diese Gruppen nicht abelsch sind. Das erscheint unnatürlich und eine allgemeinere Konstruktion, das sogenannte freie Produkt, erlaubt die Bildung eines Produktes einer Familie, die die einzelnen Gruppen der Familie als Untergruppen enthält und in der diese Kommutativität nicht auftritt. Der Begriff der freien Gruppe und des freien Produktes sind Konstruktionen von Gruppen, mit denen wir es oft zu tun haben werden. Die notwendige formale Arbeit bringt einigen Lohn.
Wir fangen an mit

Definition 1 Eine Menge $\mathcal{A}$ nennen wir Alphabet. Eine formale Potenz a^k mit $a \in \mathcal{A}$ und $k \in \mathbb{Z}$ nennen wir eine Silbe. Ein Wort ist eine endliche Folge $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ von Silben. Die Folge der Länge Null heißt leeres Wort oder 1. Die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}$ wollen wir mit $W(\mathcal{A})$ bezeichnen. Schließlich definieren wir ein Produkt $W(\mathcal{A}) \times W(\mathcal{A}) \to W(\mathcal{A})$ vermöge $(x, y) \mapsto x \cdot y = xy$, welches wir als formales Produkt oder Konkatenation bezeichnen.

Diese Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ und das leere Wort ist rechts- und linksneutral. Also ist $(W(\mathcal{A}), \cdot)$ eine Halbgruppe. Wir führen nun eine Relation $\sim \subset W(\mathcal{A}) \times W(\mathcal{A})$ ein mit den folgenden Kürzungsregeln: Für $U, V \in W(\mathcal{A})$ und $a \in \mathcal{A}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ gelte

$$\begin{aligned} &\text{Typ1:} \quad && Ua^0V \sim UV, \\ &\text{Typ2:} \quad && Ua^pa^qV \sim Ua^{p+q}V. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\sim$ zu einer Äquivalenzrelation fort. Zwei Worte sollen genau dann äquivalent sein, wenn das eine durch eine endliche Folge von Kürzungen (Typ1,2) oder Erweiterungen in das andere transformiert werden kann. Wir bezeichnen dann $F[\mathcal{A}] := W(\mathcal{A})/\sim$ als die Menge der Klassen unter dieser Äquivalenzrelation. Wir setzen für Äquivalenzklassen $[u], [v] \in F[\mathcal{A}]$ eine Multiplikation an mit $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$. Wir werden sehen, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist.

Satz 1 $(F[\mathcal{A}], \cdot)$ *ist eine Gruppe. Wir nennen diese Gruppe die freie Gruppe über* $\mathcal{A}$.

Beweis Zur Wohldefiniertheit der Multiplikation. Es seien $u \sim \tilde{u}$ und $v \sim \tilde{v}$ äquivalente Wörter, die also durch elementare Kürzungen/Erweiterungen ineinander überführt werden können. Da diese Erweiterungen auch auf das Wort uv angewendet werden können, ist $uv \sim \tilde{u}\tilde{v}$. Wegen $[1] \cdot [u] = [1 \cdot u] = [u]$ für alle $[u] \in F[\mathcal{A}]$ ist $[1]$ neutrales Element und die Multiplikation ist offenbar assoziativ. Außerdem gilt für ein beliebiges Wort $u = a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$

$$\begin{aligned}
[a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}] \cdot [a_n^{-k_n} \cdots a_1^{-k_1}] =& [a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} a_n^{-k_n} \cdots a_1^{-k_1}] \\
=& [a_1^{k_1} \cdots a_n^{0} \cdots a_1^{-k_1}] \\
=& [a_1^{k_1} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} a_{n-1}^{-k_{n-1}} \cdots a_1^{-k_1}] \\
\vdots& \\
=& [1],
\end{aligned}$$

und somit besitzt jedes Element aus $F[\mathcal{A}]$ ein Inverses. □

Definition 2 Es sei G eine Gruppe und $E \subset G$ eine beliebige Teilmenge. E heißt Erzeuger von G, falls $\cap\{H \leq G : \ E \subset H\} = G$ gilt.

Beispiel 1.1
$\{1\}$ erzeugt die Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Auch $\mathbb{Z}$ erzeugt $\mathbb{Z}$. Die Freie Gruppe $F[\mathcal{A}]$ über dem Alphabet $\mathcal{A}$ wird von von $[\mathcal{A}] = \{[a] : \ a \in \mathcal{A}\}$ erzeugt.

Definition 3 Es sei G eine Gruppe. Ein Erzeuger E von G heißt eine freie Basis, wenn es für alle Gruppen H und Abbildungen $\phi : E \to H$ (von Mengen) genau einen Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \to H$ gibt mit $\Phi|_E = \phi$. Wir nennen eine Gruppe G heißt frei, wenn sie über eine freie Basis verfügt.

Damit sind freie Gruppen über eine universelle Eigenschaft charakterisiert. Eine Gruppe G mit freier Basis E erlaubt somit für jede Gruppe H ein kommutatives Diagramm, wenn wir die Inklusion $\iota : E \hookrightarrow G$ betrachten, so dass gilt $\phi = \iota\Phi$.

Satz 2 *Eine Gruppe G ist genau dann frei, wenn es ein Alphabet $\mathcal{A}$ gibt, so dass gilt $G \cong F[\mathcal{A}]$.*

Beweis Es sei $G \cong F[\mathcal{A}]$. Dann ist $[\mathcal{A}]$ eine freie Basis von $F[\mathcal{A}]$, denn für jede Abbildung $\phi : [\mathcal{A}] \to H$ und jede Gruppe H ist durch $\Phi([a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}]) := \phi(a_1)^{k_1} \cdots \phi(a_n)^{k_n}$ die Fortsetzung zu einem Homomorphismus gegeben. Das ist wohldefiniert, da die Kürzungsregeln auch in H gelten. Das liegt daran, dass wir jede Gruppe H als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen können. Andersherum sei E eine freie Basis von G. Dann betrachten wir die freie Gruppe $F[E]$ über dem Alphabet E und die Mengenabbildung $\alpha : E \to F[E]$ mit $e \mapsto [e]$ und $\beta : [E] \to G$ mit $[e] \mapsto e$. Dann lässt sich α zu einem Homomorphismus $\phi : G \to F[E]$ fortsetzen und β zu einem Homomorphismus $\psi : F[E] \to G$ fortsetzen. Wegen $\phi|_E = \alpha$ und $\psi|_{[E]} = \beta$ gilt $\phi \circ \psi|_{[E]} = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \phi|_E = \mathrm{id}$. Weil sowohl E als auch $[E]$ Erzeuger sind, müssen nun $\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$ Identitäten sein. □

Es läßt sich nun beweisen, dass zwei freie Gruppen mit gleichmächtigen Basen isomorph sind. Es gilt aber auch, dass freie Gruppen mit Basen unterschiedlicher Mächtigkeit nicht isomorph sind. Damit können wir den *Rang* einer freien Gruppe als die Mächtigkeit einer (und damit jeder) freien Basis dieser Gruppe definieren.

2 Reduzierte Worte

Das Problem, für zwei gegebene Worte $u, v \in W(\mathcal{A})$ zu entscheiden, ob $u \sim v$ gilt, heißt das Wortproblem. In der freien Gruppe $F[\mathcal{A}]$ gibt es dafür einen effizienten Algorithmus. Im Allgemeinen ist die Lösung des Wortproblems alles andere als trivial.

Definition 4 Ein Wort heißt reduziert, wenn keine elementare Kürzung anwendbar ist, d. h. wenn kein Exponent 0 ist und es keine Silben mit demselben Buchstaben nebeneinander gibt.

Da Kürzungen die (endliche) Wortlänge verkleinern, gibt es in jeder Äquivalenzklasse mindestens ein reduziertes Wort.

Definition 5 Die Standardkürzung eines Wortes $w \in W(\mathcal{A})$ ist die Folge $w = w^{(0)}, w^1, \dots, w^{(m)} = w_*$, wobei für $1 \leq i \leq m$ das Wort $w^{(i+1)}$ durch eine elementare Kürzung an der ersten möglichen Stelle aus $w^{(i)}$ hervorgeht und w_* reduziert ist.

Ein Wort u ist also genau dann reduziert, wenn $u = u_*$. Bei Worten der Form Ua^ka^0V ist zwar nicht eindeutig festgelegt, welche Kürzung anzuwenden ist, aber die Folge ist trotzdem eindeutig.

Satz 3 *Für zwei Worte $u, v \in W(\mathcal{A})$ gilt $u \sim v \Longleftrightarrow u_* = v_*$.*

3 Das freie Produkt von Gruppen

Bei der Definition der freien Gruppe wurde aus zu den ganzen Zahlen isomorphen Gruppen (den Silben) eine neue Gruppe konstruiert. Dieser Vorgang lässt sich auch für Familien von Gruppen durchführen und liefert das sogenannte freie Produkt einer Familie von Gruppen.

Definition 6 Wenn wir in der Definition von $F[\mathcal{A}]$ anstelle der Silben a^k eine beliebige Familie von Gruppen $(G_i)_{i\in I}$ zulassen und folgende Kürzungsregeln für Worte U, V über den G_i definieren mit

$$\text{Typ 1:} \quad Ue_iV \sim UV \quad \text{für alle neutralen Elemente } e_i \in G_i,$$
$$\text{Typ 2:} \quad UabV \sim UcV \quad \text{für } a, b \in G_i \text{ mit } ab = c,$$

so erhalten wir das freie Produkt der Familie.

Beispiel 3.1
Wir betrachten das freie Produkt $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Wegen $a^2 = e = b^2$ besteht diese Gruppe aus dem leeren Wort e und allen Worten $a, b, ab, ba, aba, bab, abab, baba, \dots$. Wir betrachten nun den Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, der jedes Wort auf seine Länge modulo 2 abbildet. Dieser Homomorphismus ist offensichtlich surjektiv und der Kern besteht aus allen Worten gerader Länge. Wegen $ab = (ba)^{-1}$ ist der Kern eine unendlich zyklische Gruppe, also isomorph zu $\mathbb{Z}$. Damit ist $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ und die Gruppe lässt sich als ein semidirektes Produkt deuten. Jetzt hingegen bertrachten wir die Symmetriegruppe D_∞, die auf die in der reellen Geraden eingebetteten ganzen Zahlen wirkt. Diese wird von den zwei Elementen $t : x \mapsto x + 1$ und $s : x \mapsto -x$ erzeugt. Die Elemente sind $\dots, t^{-2}, t^{-1}, e, t, t^2, \dots$ und $t^{-2}s, t^{-1}s, s, ts, t^2s, \dots$. Dabei ist e die Identität, die das neutrale Element ist. Es gilt $t^{-2}(x) = x - 2$, was eine Translation um zwei nach links ist; weiter ist $ts(x) = t(-x) = 1 - x$. Also ist ts eine Spiegelung um den Punkt 1/2. Wegen $st(x) = s(x+1) = -x-1$ und $t^{-1}s(x) = t^{-1}(-x) = -x-1$. Also hat diese Gruppe die Präsentation $D_\infty = \langle s, t \,|\, s^2, tsts^{-1} \rangle$. Es gilt $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong D_\infty$.

---

4 Die Fundamentalgruppe

Homöomorphie ist die stärkste Äquivalenzrelation für topologische Raüme und die algebraische Topologie hat Invarianten zutage gefördert, die es etwa ermöglichen, zu sagen, dass zwei gegebene topologische Räume nicht homöomorph sind, ohne dabei den schwierigen Beweis führen zu müssen, dass es keinen Homöomorphismus gibt. Mit den Sätzen der allgemeinen Topologie haben wir Kriterien wie Kompaktheit, abzählbare Basis oder Zusammenhang: Das Intervall $[0, 1]$ kann nicht homöomorph zu $(0, 1)$ sein, weil der erste Raum kompakt ist und der zweite nicht. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist nicht homöomorph zur langen Gerade L, da der erste Raum eine abzählbare Basis für die Topologie hat und der zweite nicht. Weiter kann $\mathbb{R}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{C}$ sein, da nach Entfernen eines Punktes $\mathbb{R}$ nicht mehr zusammenhängend ist, wohl aber $\mathbb{C}$. Diese Methoden geben aber keine Methode um zu entscheiden, ob $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ homöomorph sind. Das erste neue Kriterium ist das des einfachen Zusammenhangs.

5 Homotopie von Wegen

Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Wir nennen f homotop zu g wenn es eine *stetige* Abbildung $H : X \times [0, 1] \to Y$ gibt mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Wir schreiben dann $f \simeq g$. Eine konstante Abbildung nennen wir nullhomotop. Wenn wir nun Wege in X betrachten, also stetige Abbildungen $\gamma, \delta : [0, 1] \to X$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = \delta(0) = a$ und $\gamma(1) = \delta(1) = b$, so ist eine Homotopie von γ nach δ eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$, so dass

$$H(s, 0) = \gamma(s), \quad H(s, 1) = \delta(s),$$
$$H(0, t) = a, \quad H(1, t) = b.$$

Lemma 1 *Die Relationen $f \simeq g$ und $\gamma \simeq_p \delta$ sind Äquivalenzrelationen.*

Vor dem Beweis brauchen wir noch ein einfaches Lemma, welches wir später immer wieder anwenden werden:

Lemma 2 (Verklebelemma) *Es seien X, Y topologische Räume und $X = A \cup B$ eine Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen und $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für $x \in A \cap B$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $h : X \to Y$, so dass $h|_A = f$ und $h|_B = g$.*

Beweis Es sei C abgeschlossen in der Topologie von Y. Dann ist $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Weil f stetig ist, sind die Urbilder unter f von in Y offenen Mengen offen in A. Das gleiche gilt für g. Dann ist aber $f^{-1}(C)$ aber auch abgeschlossen wie auch $g^{-1}(C)$. Weil endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, ist damit $h^{-1}(C)$ abgeschlossen und damit stetig. □

Beweis Es ist $f \simeq f$, denn $H(x, t) = f(x)$ ist eine Homotopie. Ist nun $f \simeq g$, so sei die Homotopie durch $H(x, t)$ gegeben. Dann ist aber $G(x, t) := F(x, 1 - t)$ auch eine Homotopie, die $g \simeq f$ zeigt. Schließlich sei $f \simeq g$ und $g \simeq h$ mit Homotopien $H(x, t)$ und $G(x, t)$ gegeben. Wir zeigen nun $f \simeq h$, indem wir eine Homotopie $F : X \times [0, 1] \to Y$ definieren vermöge

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Das ist wohldefiniert, weil $F(x, 1/2) = H(x, 1/2) = G(x, 1/2)$. Weil F auf den Unterräumen $X \times [0, 1/2]$ und $X \times [1/2, 1]$ stetig ist, so folgt auch die Stetigkeit auf $X \times [0, 1]$ nach Lemma (2) und damit ist auch F eine Homotopie. □

Wir bezeichnen nun die Homotopieklasse von f mit $[f]$, also

$$[f] = \{f' : [0,1] \to X : \ f \simeq f'\}.$$

Definition 7 Wir bezeichnen einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ als nullhomotop, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg c_x mit $c(t) = x$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $x \in X$.

Lemma 3 *Für beliebige Wege $\gamma : [0,1] \to X$ sind $\gamma * \overline{\gamma}$ und $\overline{\gamma} * \gamma$ nullhomotop.*

Homotopieäquivalenz wird durch Komposition erhalten.

Lemma 4 *Es seien $f_0, f_1 : X \to Y$ und $g_0, g_1 : Y \to Z$ stetige Abbildungen topologischer Räume und $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$. Dann gilt $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Proof Die Homotopien seien $F : X \times [0,1] \to Y$ und $G : Y \times [0,1] \to Z$. Dann definieren wir eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Z$ mit $H(x,t) = G(F(x,t),t)$. Diese Abbildung erfüllt $H(x,0) = G(F(x,0),0) = F(f_0(x),0) = g_0(f_0(x))$ und $H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f_1(x),1) = g_1(f_1(x))$. □

Wir können für Wege ein Produkt erklären, wenn der Endpunkt des einen Weges der Anfangspunkt des anderen ist.

Definition 8 Es seien $\gamma, \delta : [0,1] \to X$ Wege in X mit $\gamma(1) = \delta(0)$. Dann definieren wir das Produkt $\gamma * \delta$ als

$$(\gamma * \delta)(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Das ist dann wohldefiniert und auch stetig und somit ein Weg in X. Den inversen Weg $\overline{\gamma}$ zu γ bezeichnen wir mit $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Der konstante Weg um x_0 ist e_{x_0}, also $e_{x_0}(t) = x_0$ für alle t.

Wir sehen nun, dass dieses Produkt von Wegen auch auf den Äquivalenzklassen von Wegen in einem topologischen Raum X wohldefiniert ist.
Diese Verknüpfung erfüllt nun alle Gesetze, um die Struktur einer Gruppe zu erfüllen. Allerdings ist dieses Produkt nicht für alle Elemente aus dem Raum der Homotopieklassen aller Wege in X erfüllt, sondern nur für diejeningen, die verbindbar sind. Wir schreiben also $[f] * [g] = [f * g]$. Die Wohldefiniertheit lesen wir daran ab, dass für Wege f, f', g, g' in X und $f' \in [f]$ und $g' \in [g]$ und

---

Beispiel 5.1
Es ist $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{1\}$ für einen beliebigen Basispunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und ebenso gilt für jede konvexe, zusammenhängende Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ und jeden beliebigen Basispunkt $x_0 \in X$, dass die Fundamentalgruppe trivial ist. Das sehen wir daran, dass jede Schleife γ um x_0 homotop ist zur konstanten Abbildung e_{x_0} vermöge der Homotopie

$$H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s \cdot e_{x_0}(t).$$

Wie sieht es nun mit der Bedeutung des Basispunktes aus? Ist die Wahl eines ausgezeichneten Basispunktes wichtig? Dieser Frage werden wir uns nun widmen.

Definition 1 Es sei X ein topologischer Raum und $x_0, x_1 \in X$ beliebige Punkte und α ein Weg, der x_0 mit x_1 verbindet. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

vermöge $\hat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]$.

Diese Definition ist wohldefiniert, da $*$ keine Probleme bereitet und f eine Schleife um x_0 ist; also ist $\overline{\alpha} * (f * \alpha)$ eine Schleife um x_1. Damit bildet $\hat{\alpha}$ die Fundamentalgruppen entsprechend ab. Nun verwundert nicht weiter, dass

Satz 4 (Wechsel des Basispunktes) *Die Abbildung $\hat{\alpha}$ ist ein Isomorphismus von Gruppen.*

Beweis Die Homomorphieeigenschaft zeigen wir mit

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f])\hat{\alpha}([g]) &= ([\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\overline{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\overline{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] = \hat{\alpha}([f * g]).\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\hat{\alpha}$ ein Isomorphismus ist, nehmen wir $\beta = \overline{\alpha}$ als den zu α inversen Weg. Wir wollen zeigen, dass dann $\hat{\beta} = \hat{\alpha}^{-1}$ gilt. Wir berechnen für jedes Element $[h] \in \pi_1(X, x_1)$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\overline{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}], \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] = [h].\end{aligned}$$

Analog zeigen wir $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$ für alle $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. □

Beispiel 5.2
Es sei G eine topolgische Gruppe; also eine Gruppe $(G, \bullet)$, die zugleich ein topologischer Raum ist, so dass die Abbildungen $G \to G$ mit $g \mapsto g^{-1}$ und $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \bullet h$ stetig sind. Dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$ abelsch. Das sehen wir ein, wenn wir Schleifen $\gamma, \delta : [0, 1] \to G$ um das Einselement e von G betrachten. Wir haben nicht nur die Multiplikation $\gamma * \delta$, sondern auch eine Multiplikation $\bullet$ von Wegen mit $(\gamma \bullet \delta)(t) = \gamma(t) \bullet \delta(t)$. Weil die Multiplikation in G stetig ist, haben wir damit auch einen Weg bei e. Diese Multiplikation ist nicht nur für Wege wohldefiniert, sondern auch für die Homotopieklassen von Wegen! Dazu überlegen wir uns, dass wir für eine Homotopie F zwischen unserem Weg γ und einem Weg γ' und einer Homotopie G zwischen δ und δ' eine Homotopie H zwischen $\gamma \bullet \delta$ und $\gamma' \bullet \delta'$ erhalten, indem wir einfach $H(s, t) := F(s, t) \bullet G(s, t)$ ansetzen. Wir suchen eine Homotopie, die zwischen $\gamma \bullet \delta$ und $\delta \bullet \gamma$ für alle Wege γ, δ bei e vermittelt. Unsere Homotopie $H(s, t)$ soll $\gamma(t) \bullet \delta(t)$ enthalten und von links mit etwas multipliziert werden, dass für $s = 0$ gleich dem Einselement und für $s = 1$ gleich $\gamma(t)^{-1}$ ist. Weiter wollen wir von rechts etwas heranmultiplizieren, dass für $s = 0$ gleich dem Einselement ist und für $s = 1$ gleich $\gamma(t)$. Schließlich brauchen wir noch $H(s, 0) = H(s, 1) = e$ für alle $1 \le s \le 1$. Die Lösung ist

$$H(s, t) = \gamma(st)^{-1} \bullet \gamma(t) \bullet \delta(t) \bullet \gamma(st).$$

---

6 Überlagerungen

Definition 9 Sei X ein topologischer Raum. Eine Überlagerung von X besteht aus einem topologischen Raum $\tilde{X}$ und einer stetigen Abbildung $p : \tilde{X} \to X$, so dass es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist die Vereinigung einer Familie $(\tilde{U}_j)_{j \in J}$ paarweiser disjunkter offener, nichtleerer Mengen aus $\tilde{X}$.

2. Für alle $j \in J$ ist $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ ein Homöomorphismus.

Wir nennen p auch die Überlagerungsabbildung und $\tilde{X}$ den Überlagerungsraum. Weiter nennen wir eine Überlagerung wegzusammenhängend, wenn sowohl $\tilde{X}$ als auch X wegzusammenhängend sind. Für $x \in X$ heißt $p^{-1}(x)$ die Faser über x.

Wir sagen dann auch, dass eine solche Umgebung U von x gleichmäßig überlagert wird. Für $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ sagen wir auch, dass $\tilde{x}$ über x liegt und die Mengen $\tilde{U}_j$ nennen wir auch die Blätter über U. Ein anschauliches Beispiel ist für einen Raum X ist der Überlagerungsraum $\tilde{X} = X \times \{1, \ldots, n\}$ für eine natürliche Zahl n. Die Überlagerungsabbildung sei $p : \tilde{X} \to X$ sei gegeben durch $p(x, i) = x$. Wenn wir uns X als einen Pfannkuchen vorstellen, dann besteht $\tilde{X}$ aus n übereinandergestapelten Pfannkuchen.

Beispiel 6.1
Die reelle Gerade überlagert die Einheitskreislinie vermöge $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$. Dies ist eine unendlich-blättrige Überlagerung. Die S^1 kann auch ihr eigener Überlagerungsraum sein. Dazu betrachten wir die Abbildung $p : z \mapsto z^n$ mit einer natürlichen Zahl n. Die Faser über $z \in S^1$ besteht dann aus den Punkten $\zeta^0 z, \zeta z, \ldots, \zeta^{n-1} z$, wobei ζ eine n-te Einheitswurzel ist. Also haben wir damit eine n-blättrige Überlagerung; eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von z ist dann jeder offene Kreisbogen der Länge $< 2\pi/n$.

Wir werden sehen, dass dies im wesentlichen (d. h. bis auf Äquivalenz) die einzigen Überlagerungen der S^1 sind.

Lemma 5 *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung für ein $x \in X$. Dann gilt:*

1. *Ist X zusammenhängend, so sind je zwei Fasern gleichmächtig. Diese Kardinalität nennen wir die Blätterzahl der Überlagerung.*

2. *Für $x \in X$ ist die Faser $p^{-1}(x)$ ein diskreter Teilraum von $\tilde{X}$.*

3. *Sei $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ ein zusammenhängender Unterraum des Überlagerungsraumes und $p(\tilde{A}) \subset U$. Dann gibt es ein Blatt $\tilde{U}_i$ über U mit $\tilde{A} \subset \tilde{U}_i$.*

4. *Ist $x \in V \subset U$ für U eine offene Umgebung von x, so wird auch V gleichmäßig überlagert.*

5. *Die gleichmäßig überlagerten Umgebungen in X bilden eine Basis für die Topologie von X und die darüberliegenden Blätter bilden eine Basis für die Topologie von $\tilde{X}$.*

6. *Die Überlagerungsabbildung p ist eine offene, surjektive Abbildung und ein lokaler Homöomorphismus.*

Beweis 1) Für je zwei Punkte $x, y \in U$ haben die Fasern $p^{-1}(x)$ und $p^{-1}(y)$ durch den Homöomorphismus $p|_U$ die gleiche Mächtigkeit. Damit ist die Menge aller Punkte $x \in X$ mit vorgegebener Kardinalität der Fasern offen in X. Wenn wir nun die Vereinigung bilden, so ist dies eine disjunkte Vereinigung. Weil X als zusammenhängend angenommen wurde, ist die Aussage damit klar. 2) folgt sofort aus der Eigenschaft einer Überlagerung, dass $p|_U$ ein Homöomorphismus sein soll. □

Hiermit sehen wir insbesondere, dass der Begriff der Blätterzahl wohldefiniert ist.

Definition 10 (Äquivalenz von Überlagerungen) Gegeben sei ein topologischer Raum X und zwei Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$ und $p' : \tilde{X}' \to X$. Wir nennen die Überlagerungen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $f : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ gibt mit $p' \circ f = p$.

Ein solcher Homöomorphismus ist für alle Punkte des Basisraumes eine Bijektion zwischen den Fasern unter den Überlagerungen und daher nennen wir einen solchen Homöomorphismus auch *fasertreu*. Unser Ziel ist nun eine Klassifikation aller Überlagerungen eines vorgelegten Basisraumes.

6.1 Das Liften von Wegen und das Hauptlemma der Überlagerungstheorie

Definition 11 Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg in X. Ein Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ nennen wir einen Lift von γ, wenn gilt: $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Es gilt dann für alle $0 \le t \le 1$, dass $p(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Ein geschlossener Weg im Basisraum X kann geschlossene oder auch nicht geschlossene geliftete Wege im Überlagerungsraum besitzen. Darauf wollen wir nun genauer eingehen.

Beispiel 6.2
Wir betrachten wieder die Überlagerung der S^1 durch die reelle Gerade mit $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Der Weg $\gamma : [0,1] \to S^1$ mit $\gamma(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$ hat dann in $\mathbb{R}$ den Lift $\overline{\gamma}(s) = s/2$.

Lemma 6 (Hauptlemma der Überlagerungstheorie) *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zu jedem Weg $\gamma : [0,1] \to X$ in X und zu jedem Punkt $\tilde{x}$ über dem Anfangspunkt $\gamma(0)$ gibt es genau einen Lift $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$. Diesen Lift bezeichnen wir mit $L_p(\gamma, \tilde{x})$. Weiter gilt, dass zueinander homotope Wege zu homotopen Wegen im Überlagerungsraum geliftet werden. Für zwei Wege γ, δ in X mit $\gamma \cong_p \delta$ und einem Punkt $\tilde{x}$ über $\gamma(0) = \delta(0)$ folgt $L_p(\gamma, \tilde{x}) \cong L_p(\delta, \tilde{x})$. Insbesondere haben die Lifte $L_p(\gamma, \tilde{x})$ und $L_p(\delta, \tilde{x})$ denselben Endpunkt.*

Vor dem Beweis erst einige Folgerungen

Korollar 1 *Wir haben die folgenden Eigenschaften:*

1. *Der Weg $L_p(\gamma, \tilde{x})$ in $\tilde{X}$ ist durch die Bedingungen $p \circ L_p(\gamma, \tilde{x}) = \gamma$ und $L_p(\gamma, \tilde{x})(0) = \tilde{x}$ eindeutig bestimmt.*

2. *Geschlossen nullhomotope Wege werden zu geschlossenen nullhomotopen Wegen geliftet.*

3. *Durchläuft $\tilde{x}$ die Faser über $\gamma(0)$, so sind die $L_p(\gamma, \tilde{x})$ genau alle Liftungen von γ; die Anzahl der Liftungen stimmt also mit der Blätterzahl der Überlagerung überein.*

4. *Für verbindbare Wege γ, δ in X gilt $L_p(\gamma * \delta, \tilde{x}) = L_p(\gamma, \tilde{x}) * L_p(\delta, \tilde{y})$, wobei $\tilde{y}$ der Endpunkt von $L_p(\gamma, \tilde{x})$ ist. Ferner ist $L_p(\delta, \tilde{x})^{-1} = L_p(\delta^{-1}, \tilde{z})$, wobei $\tilde{z}$ der Endpunkt von $L_p(\delta, \tilde{x})$ ist.*

Beweis 1.) Das ist gerade die Aussage des Hauptlemmas. 3.) folgt direkt aus 1.). □

Nun kommen wir zum Beweis des Hauptlemmas.

Satz 5 *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und Y ein zusammenhängender topologischer Raum und $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \to \tilde{X}$ stetige Abbildungen mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$. Gibt es ein $y \in Y$ mit $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$, so gilt $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

Beweis Es sei also ein solcher Punkt $y \in Y$ vorgelegt und es sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $p\tilde{f}(y) = p\tilde{g}(y)$. Es seien $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$ die Blätter über U, die $\tilde{f}(y)$ bzw. $\tilde{g}(y)$ enthalten. Dann ist aber $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_1) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{U}_2)$ eine offene Umgebung von y in Y. Wegen $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$ folgt $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$ und damit $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)$ für alle $z \in W$. Für $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$ gilt $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$, also $\tilde{f}(z) \neq \tilde{g}(z)$ für alle $z \in W$. Damit ist $\{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\}$ offen in Y und auch $Y \backslash \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\}$ ist offen in Y. Die erstere Menge ist aber nach Voraussetzung nichtleer. Weil Y zusammenhängend ist, folgt die Aussage. $\square$

Dieser Satz enthält die Eindeutigkeitsaussage des Lemmas als Spezialfall. Wenn wir uns $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ als Wege in $\tilde{X}$ mit gemeinsamen Anfangspunkt vorstellen, so müssen sie übereinstimmen.

Als nächstes beweisen wir die Existenz des Lifts $L_p(\gamma, \tilde{x})$. Weil $\gamma : [0,1] \to X$ stetig ist und $[0,1]$ kompakt und zusammenhängend, so ist auch das Bild $\gamma([0,1])$ kompakt und zusammenhängend in X. Für einen Weg γ haben wir damit eine Partition $0 = t_1 < \cdots < t_n = 1$ des Einheitsintervalls, so dass für alle $1 \leq i \leq n$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $U_i \subset X$ existiert mit $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ exitiert. Wir wählen hierzu mit der Kompaktheit aus einer offenen Überdeckung von $\gamma([0,1])$ von gleichmäßig überlagerten Umgebungen eine endliche Teilüberdeckung aus und wählen eine geeignete Zerlegung von $[0,1]$. Es sei dann $p_i : \tilde{U}_i \to U_i$ der Homöomorphismus $p|_{\tilde{U}_i}$, wobei $\tilde{U}_i$ ein Blatt ist, über das wir noch verfügen werden. Weiter sei $\tilde{\gamma}_i : [t_{i-1}, t_i] \to \tilde{U}_i$ die Abbildung $\tilde{\gamma}_i(t) = p_i^{-1}(\gamma(t))$. Wir wählen nun $\tilde{U}_1$ als das Blatt über U_1, welches den vorgegebenen Punkt $\tilde{x}$ über $\gamma(0)$ enthält. Dann wählen wir $\tilde{U}_2$ als das Blatt über U_2, welches den Punkt $\tilde{\gamma}_1(t_1)$ enthält. Weiter wählen wir $\tilde{U}_3$ als das Blatt über U_3, dass den Punkt $\tilde{\gamma}_2(t_2)$ enthält und so weiter. Die stückweisen Liftungen $\tilde{\gamma}_i$ werden so zu einer stetigen Funktion $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ zusammengesetzt und wegen $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ist $\tilde{\gamma} = L_p(\gamma, \tilde{x})$ der gesuchte Lift von γ.

Es bleibt nun die Aussage über homotope Wege zu beweisen. Wir benutzen einen Hilfssatz über die Lifte von Homotopien.

Lemma 7 *Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so gibt es zu jeder stetigen Abbildung $H : [0,1]^2 \to X$ und jedem Punkt $\tilde{x}$ über $H(0,0)$ eine stetige Abbildung $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to \tilde{X}$ mit $p \circ \widetilde{H} = H$ und $\widetilde{H}(0,0) = \tilde{x}$.*

Beweis Der Beweis erfolgt sehr ähnlich wie der vorhergehende. $\square$

Das nun feststehende Hauptlemme erlaubt es uns, einen Satz zu beweisen, der die Überlagerungen mit der Fundamentalgruppe eines Basisraumes X in Bezug setzt. Die Frage, die wir uns stellen, ist die folgende: Wann gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{f}$, so dass für eine gegebene Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ und stetiges $f : Y \to X$ gilt, dass $\tilde{f}p = f$.

Satz 6 (Liftungssatz) *Es sei Y ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $y_0 \in Y, x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ vorgegeben wie oben mit $f(y_0) = x_0$ und $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

2. *$f_\# \pi_1(Y, y_0) \subset p_\# \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Beweis Siehe [Mun75]. $\square$

6.2 Das Liftungsverhalten einer Überlagerung

Wir stellen nun die Frage, welche Liftungen geschlossener Wege in einem Raum X wiederum in $\widetilde{X}$ geschlossen sind und was für Konsequenzen für die Äquivalenz von Überlagerungen folgern. Es sei nun $x_0 \in X$ fest und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots$ Punkte über x_0.

Satz 7 *Der von einer Überlagerungsabbildung $p : \tilde{X} \to X$ induzierte Homomorphismus $p_\# : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv. Das Bild $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ besteht aus den Homotopieklassen $[\gamma]$, für die die Liftung $L_p(\gamma, \tilde{x}_0)$ ein geschlossener Weg in X ist. Die Untergruppe $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von $\pi_1(X, x_0)$ heißt auch charakterisierende Untergruppe der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ zum Punkt $\tilde{x}_0$.*

Beweis Siehe [Mun75]. □

Bemerkung 1 Die charakterisierende Untergruppe $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ hängt im Allgemeinen von der Wahl des Fußpunktes ab.

Satz 8 *Es gelten die beiden Aussagen*

1. *Ist $\tilde{\gamma}$ ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_0'$ und $\alpha = [p \circ \tilde{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$, so ist $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \alpha \cdot p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \cdot \alpha^{-1}$. Ist also $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so sind je zwei charakterisierende Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$ zueinander konjugiert.*

2. *Ist $U \subset \pi_1(X, x_0)$ zu einer charakterisierenden Untergruppe $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ konjugiert, dann ist U ebenfalls eine charakterisierende Untergruppe, also $U = p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')$ für einen Punkt $\tilde{x}_0'$ über x_0.*

Beweis 1) Es gilt $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [\tilde{\gamma}]\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')[\tilde{\gamma}]^{-1}$. Wenn wir den Homomorphismus $p_\#$ anwenden, erhalten wir die Behauptung. 2) Es sei $U = \alpha^{-1} \cdot p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha$ für ein $\alpha = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Für $\tilde{\gamma} = L_p(\gamma, \tilde{x}_0)$ und $\tilde{x}_0' = \tilde{\gamma}(1)$ ist dann $U = p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')$, denn wegen 1) gilt $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \alpha \cdot p_\#\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \cdot \alpha^{-1}$. □

Die Untergruppen der Fundamentalgruppe können wir in Konjugationsklassen ordnen. Mit dem obigen Satz fallen die zu einer wegzusammenhängenden Überlagerung gehörenden charakterisierenden Untergruppen in einer Konjugationsklasse zusammen.

Satz 9 *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann ist*

$$\mathcal{C}(\tilde{X}, p) = \{p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \,|\, \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$$

eine Klasse konjugierter Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$. Wir nennen sie die charakteristische Konjugationsklasse der Überlagerung.

Wir sehen hier, dass damit der Makel der Abhängigkeit des Fußpunktes endgültig getilgt ist. Jetzt arbeiten wir weiter an der Klassifikation der Überlagerungen.

Satz 10 *Es sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum und $p : \tilde{X} \to X$ und $p' : \tilde{X}' \to X$ zwei wegzusammenhängende Überlagerungen von X. Diese Überlagerungen sind genau dann zueinander äquivalent, wenn sie das gleiche Liftungsverhalten haben, d. h. wenn die charakterisierenden Konjugationsklassen $\mathcal{C}(\tilde{X}, p)$ und $\mathcal{C}(\tilde{X}', p')$ in $\pi_1(X, x_0)$ übereinstimmen.*

Beweis Die Notwendigkeit sehen wir leicht ein. Ist nämlich $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ ein Homöomorphismus mit $p'\tilde{f} = p$, so folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\tilde{X}, p) &= \{p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) | \, \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\} \\
&= \{(p' \circ \tilde{f})_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) | \, \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\} \\
&= \{p'_\#\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}_0') | \, \tilde{x}_0' \in p'^{-1}(x_0)\} \\
&= \mathcal{C}(\tilde{X}', p').
\end{aligned}$$

Es sei nun $\mathcal{C}(\tilde{X}, p) = \mathcal{C}(\tilde{X}', p')$. Wir wählen dann ein $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Wegen $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \in \mathcal{C}(\tilde{X}', p')$ gibt es ein $\tilde{x}_0' \in p'^{-1}(x_0)$ mit $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p'_\# \pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}_0)$. Da mit X auch $\tilde{X}$ und $\tilde{X}'$ lokal wegzusammenhängend sind, existieren nach dem Liftungssatz für beide Liftungsprobleme $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ Lösungen mit $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$ und $\tilde{p}'(\tilde{x}_0') = \tilde{x}_0$ gilt. Es gilt dann $p' \circ \tilde{p} = p$ und $p \circ \tilde{p}' = p'$, woraus sich durch Ineinandersetzen folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{p}' \circ \tilde{p} &= p = p \circ \mathrm{id}_{\tilde{X}}, \\ p' \circ \tilde{p} \circ \tilde{p}' &= p' = p' \circ \mathrm{id}_{\tilde{X}'}. \end{aligned}$$

Da in der ersten Zeile beide Seiten im Punkt $\tilde{x}_0$ und in der zweiten Zeile beide Seiten im Punkt $\tilde{x}_0'$ übereinstimmen, folgt $\tilde{p}' \circ \tilde{p} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ und $\tilde{p} \circ \tilde{p}' = \mathrm{id}_{\tilde{X}'}$. Da beide Abbildungen stetig sind, ist $\tilde{p}$ ein Homöomorphismus mit Inversem $\tilde{p}'$ und es gilt $p = p' \circ \tilde{p}$. Also sind p und p' äquivalent. □

Satz 11 *Die Blätterzahl einer wegzusammenhängenden Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist der Index der charakterisierenden Untergruppe $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis Wir müssen erst zeigen, dass die Aussage wohldefiniert ist, also dass der Index unabhängig von der Wahl des Punktes $\tilde{x}_0$ über x_0 ist. Sei dazu $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \alpha \cdot p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \cdot \alpha^{-1}$ und $(p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha_j)_{j \in J}$ die Menge der Rechtsnebenklassen von $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$, also insbesondere eine disjunkte Zerlegung von $\pi_1(X, x_0)$. Dann ist $|J|$ der Index von $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$. Es gilt für alle $j \in J$:

$$p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha_j = \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \alpha_j = \alpha \cdot p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha_j.$$

Da dies nach wie vor eine disjunkte Zerlegung von $\pi_1(X, x_0)$ ist, bleibt dies auch nach Konjugation mit α^{-1} der Fall; es ist also $\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha_j \cdot \alpha = p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0') \cdot (\alpha^{-1} \cdot \alpha_j \cdot \alpha)$ eine disjunkte Zerlegung von $\pi_1(X, x_0)$, diesmal in Rechtsnebenklassen von $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')$, und die Anzahl der Rechtsnebenklassen ist in beiden Fällen $|J|$. Sei nun $(\tilde{x}_l)_{l \in L} = p^{-1}(x_0)$ die Menge aller Punkte über x_0, dann ist $|L|$ die Blätterzahl von p, und für jedes $l \in L$ sei $\tilde{w}_l$ ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_l$. Dann ist $\alpha_l = [p \circ \tilde{w}_l] \in \pi_1(X, x_0)$. Wir behaupten nun, dass $(p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha_l)_{l \in L}$ eine Zerlegung von $\pi_1(X, x_0)$ in Rechtsnebenklassen bezüglich $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha_l &= \{[p \circ \tilde{w}] \cdot [p \circ \tilde{w}_l] \,:\, [p \circ \tilde{w}] \in p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\}, \\ \text{und} \quad [p \circ \tilde{w}] \in p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) &\iff L_p(p \circ \tilde{w}, \tilde{x}_0) \text{ ist geschlossen in } \tilde{X}. \end{aligned}$$

Weiter gilt, dass $L_p((p \circ \tilde{w}) \cdot (p \circ \tilde{w}_l), \tilde{x}_0)(1) = \tilde{x}_l$ genau dann, wenn $[p \circ \tilde{w}] \in p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Ist $[p \circ \tilde{w}] \in p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, so gilt $L_p((p \circ \tilde{w}) \cdot (p \circ \tilde{w}_l), \tilde{x}_0)(1) = L_p(p \circ \tilde{w}_l, \tilde{x}_0)(1) = \tilde{w}_l(1) = \tilde{x}_l$. Sei umgekehrt $L_p((p \circ \tilde{w}) \cdot (p \circ \tilde{w}_l), \tilde{x}_0)(1) = \tilde{x}_l$. Angenommen, $[p \circ \tilde{w}] \notin p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und sei $L_p(p \circ \tilde{w}, \tilde{x}_0)(1) = \tilde{x}_k$ mit $\tilde{x}_l \neq \tilde{x}_k$. Dann gilt $L_p((p \circ \tilde{w}) \cdot (p \circ \tilde{w}_l), \tilde{x}_0)(1) = L_p(p \circ \tilde{w}_l, \tilde{x}_k)(1) = \tilde{x}_l = L_p(p \circ \tilde{w}_l, \tilde{x}_0)(1)$ und außerdem $p \circ L_p(p \circ \tilde{w}_l, \tilde{x}_k) = p \circ L_p(p \circ \tilde{w}_l, \tilde{x}_0)$, also $\tilde{w}_l = \tilde{w}_k$. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $[w] \in p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cdot \alpha_l \Leftrightarrow L_p(w, \tilde{x}_0)(1) = \tilde{x}_l$ und damit ist der Satz bewiesen, denn der Lift mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ eines Weges w hat genau einen der Punkte $\tilde{x}_l$ als Endpunkt. □

6.3 Die universelle Überlagerung

Lemma 8 *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann sind äquivalent:*

1. $\widetilde{X}$ ist zusammenhängend.

2. Die Konjugationsklasse $\mathcal{C}(\tilde{X}, p)$ ist die triviale Untergruppe in $\pi_1(X, x_0)$

3. Ein geschlossener Weg γ in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 liftet sich genau dann in einen geschlossenen Weg in $\tilde{X}$, wenn γ nullhomotop ist.

Eine solche Überlagerung nennen wir auch universell.

Ist X ein lokal wegzusammenhängender Raum, so sind je zwei universelle Überlagerungen von X zueinander äquivalent. Wir sprechen daher auch von *der* universellen Überlagerung von X.

Definition 12 Wir nennen einen topologischen Raum X semilokal einfach zusammenhängend, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass jeder geschlossene Weg in U nullhomotop ist. Ist X darüber hinaus auch noch wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so nennen wir X hinreichend zusammenhängend.

Die Bezeichnung hinreichend zusammenhängend erklärt sich aus dem folgenden Theorem. Besitzt ein Raum X eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$, so ist jede bezüglich p gleichmäßig überlagerte Umgebung $U \subset X$ einfach zusammenhängend, denn jeder geschlossene Weg in U liftet sich in ein Blatt $\tilde{U}$ über U, ist also auch in X geschlossen und damit nullhomotop. Damit ist X semilokal einfach zusammenhängend. Entscheidend ist die Umkehrung dieser Aussage:

Satz 12 *Jeder hinreichend zusammenhängende Raum X besitzt eine universelle Überlagerung.*

Beweis Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Dazu sei zuerst $(U_j)_{j \in J}$ eine Überlagerung von X durch nichtleere, offene, wegzusammenhängende Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jeder in U_j liegende, geschlossene Weg ist nullhomotop in X. Das ist möglich, weil X semilokal einfach zusammenhängend ist. Für jedes $j \in J$ wählen wir einen Weg v_j in X, so dass $v_j(0) = x_0$ der Basispunkt in X ist und $v_j(1) \in U_j$ ist, so dass weiter gilt:

2. Für jedes $j \in J$ mit $x_0 \in U_j$ ist v_j der konstante Weg bei x_0. Für $x \in U_i \cap U_j$ sei $g_{ij}(x) = [v_i w_i w_j^{-1} v_j^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$, wobei w_i bzw. w_j Wege in U_i bzw. U_j sind, die $v_i(1)$ bzw. $v_j(1)$ mit x verbinden. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Wege, denn für andere Wege w_i' und w_j', die dieselben Punkte verbinden, sind wegen (1) die Wege $w_i^{-1} w_i'$ und $w_j^{-1} w_j'$ nullhomotop, so dass gilt $[v_i w_i' w_j'^{-1} v_j^{-1}] = [v_i w_i w_i^{-1} w_i' w_j'^{-1} w_j w_j^{-1} v_j^{-1}] = [v_i w_i w_j^{-1} v_j^{-1}]$. Damit haben wir:

3. Für $x \in U_i$ ist $g_{ii}(x) = 1$. Für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ ist $g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$, weil $[v_i w_i w_j^{-1} v_j^{-1}] \cdot [v_j w_j w_k^{-1} v_k^{-1}] = [v_i w_i w_k^{-1} v_k^{-1}]$. Für $x \in U_i \cap U_j$ ist damit als Spezialfall $g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x)$.

4. Ist $W \subset U_i \cap U_j$ und W wegzusammenhängend, so ist $g_{ij}(x) = g_{ij}(y)$ für alle $x, y \in W$. Denn ist w ein Weg in W, der x mit y verbindet, so folgt $g_{ij}(x) = [v_i w_i w_j^{-1} v_j^{-1}] = [v_i w_i w w^{-1} w_j^{-1} v_j^{-1}] = [v_i w_i w (w w_j)^{-1} v_j^{-1}]$ und $w_i w$ bzw. $w_j w$ sind Wege in U_i bzw. U_j von $v_i(1)$ bzw. $v_j(1)$ nach x.

Im nächsten Schritt versehen wir sowohl $\pi_1(X, x_0)$ als auch J mit der diskreten Topologie. Dann betrachten wir im Produkt $X \times \pi_1(X, x_0) \times J$ den Unterraum $T = \{(y, \alpha, j) \in X \times \pi_1(X, x_0) \times J \ : \ x \in U_j\}$. Dann ist T die disjunkte Vereinigung der offenen Mengen $U_j \times \alpha \times j$. Wir nennen nun zwei Punkte (x, α, j) und (y, β, i) von T äquivalent, wenn $x = y$ und $\beta = g_{ij}\alpha$. Dies ist mit der Eigenschaft (3) oben eine Äquivalenzrelation. Es sei nun $\widetilde{X} = T/\sim$ und $s : T \to \widetilde{X}$ die Projektion. Ist nun $V \subset U_j$ offen in X, so ist das Bild $s(V \times \alpha \times j)$ offen in $\widetilde{X}$ für alle $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Mit $T = \cup_{i,\beta} U_i \times \beta \times i$ gilt:

$$\begin{aligned} s^{-1}s(V \times \alpha \times j) &= s^{-1}s(V \times \alpha \times j) \cap T \\ &= s^{-1}s(V \times \alpha \times j) \cap \bigcup_{i,\beta} U_i \times \beta \times i \\ &= \bigcup_{i,\beta} (s^{-1}s(V \times \alpha \times j) \cap U_i \times \beta \times i). \end{aligned}$$

Da nach Definition der Quotiententopologie $s(V \times \alpha \times j)$ genau dann offen ist, wenn $s^{-1}s(V \times \alpha \times j)$ offen ist, genügt es zu zeigen, dass $s^{-1}s(V \times \alpha \times j) \cap U_i \times \beta \times i$ offen ist für alle $i \in J$ und $\beta \in \pi_1(X, x_0)$. Dieser Durchschnitt besteht aus allen Punkten (y, β, i) mit $y \in V \cap U_i$ und $\beta = g_{ij}\alpha$. Sei nun $W \subset V \cap U_i$ eine wegzusammenhängende Umgebung von y in X, so liegt die offene Menge $W \times \beta \times i$ in $(s^{-1}s(V \times \alpha \times j) \cap U_i \times \beta \times i)$, weil für alle $x, y \in W$ gilt, dass $g_{ij}(x) = g_{ij}(y)$. Im letzten Schritt betrachten wir nun die Projektion $\mathrm{pr} : T \to X$ mit $(x, \alpha, j) \mapsto x$. Wir definieren nun $p = \mathrm{pr} \circ s^{-1} : \widetilde{X} \to X$ und zeigen, dass dies schließlich eine universelle Überlagerung von X ist. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für die Klasse $[(x, \alpha, j)] \in \widetilde{X}$ gilt $s^{-1}([(x, \alpha, j)]) = \{(y, \beta, i) : y = x, \beta = g_{ij}\alpha\}$ und $\mathrm{pr}(\{(y, \beta, i) : y = x, \beta = g_{ij}(x)\alpha\}) = x$ und $\gamma = g_{kj}(x)\alpha$ und damit gilt:

$$\begin{aligned} s^{-1}([(z, \gamma, k)]) &= \{(y, \beta, i) : y = z, \beta = g_{ik}(x)\gamma\} \\ &= \{(y, \beta, i) : y = x, \beta = g_{ik}(x)g_{kj}(x)\alpha\} \\ &= \{(y, \beta, i) : y = x, \beta = g_{ij}(x)\alpha\}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{pr}(\{(y, \beta, i) : y = x, \beta = g_{ij}(x)\alpha\}) = x.$$

Desweiteren ist p stetig, denn für eine offene Menge $U \subset X$ gilt:

$$\mathrm{pr}^{-1}(U) = (U \times \pi_1(X, x_0) \times J) \cap T, \quad s(U \times \pi_1(X, x_0) \times J) \cap T = \bigcup_{j \in J, \alpha \in \pi_1(X, x_0)} s(U \cap U_j \times \alpha \times j),$$

und diese Menge ist offen, also ist das Urbild jeder offenen Menge in X offen in $\widetilde{X}$. Weiter sind die Mengen $\tilde{U}_{j,\alpha} = s(U_j \times \alpha \times j)$ offen in $\widetilde{X}$, und wegen $g_{jj}(x) = 1$ ist $\tilde{U}_{j,\alpha} \cap \tilde{U}_{j,\beta} = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$. Weiter gilt:

$$p^{-1}(U_j) = \bigcup_{i \in J, \alpha \in \pi_1(X, x_0)} s(U_j \cap U_i \times \alpha \times i) = \bigcup_{\alpha \in \pi_1(X, x_0)} s(U_j \times \alpha \times j) = \bigcup_{\alpha \in \pi_1(X, x_0)} \tilde{U}_{j,\alpha},$$

dabei erklärt sich das zweite Gleichheitszeichen dadurch, dass es zu jedem Punkt (x, β, i) mit $x \in U_j \cap U_i$ ein $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ gibt mit $\beta = g_{ij}(x)\alpha$ und damit ist $s(x, \alpha, j) = [(x, \alpha, j)] = [(x, g_{ij}(x)\alpha, i)] = [(x, \beta, i)] = s(x, \beta, i)$. Wählen wir nun feste j und α, so ist die Abbildung $q_j : U_j \to \tilde{U}_{j,\alpha}$ mit $x \mapsto s(x, \alpha, j)$ stetig, bijektiv und offen, also ein Homöomorphismus. Das Inverse dazu ist offensichtlich die Abbildung $p|_{\tilde{U}_{j,\alpha}} : \tilde{U}_{j,\alpha} \to U_j$, welche ebenfalls ein Homöomorphismus ist. Damit ist p eine Überlagerung. Wir zeigen nun, dass $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Aus der Definition von p folgt, dass die Menge aller Punkte $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ über einem fest vorgegebenen Punkt $x \in X$ genau die Menge aller Punkte in $\widetilde{X}$ ist, die sich in der Form $s(x, \alpha, j)$ schreiben läßt für ein $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ und ein $j \in J$, so dass $x \in U_j$. Sei $w : [0, 1] \to X$ ein geschlossener Weg in X mit $w(0) = w(1) = x_0$ und sei $s(x_0, \alpha, j)$ ein fester Punkt über $x_0 \in U_j$. Wir werden nun zeigen, dass der Lift von w mit Anfangspunkt $s(x_0, \alpha, j)$ den Endpunkt $s(x_0, [w]^{-1}\alpha, j)$ hat. Weil das Bild $w([0,1])$ kompakt ist, können wir aus unserer Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ eine endliche Teilüberdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von $w([0,1])$ wählen mit $U_j = U_1$. Dann gibt es bei geeigneter Numerierung von $U_1, \ldots, U_n$ eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ von $[0,1]$, so dass $w([t_{i-1}, t_i]) \in U_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hierbei haben wir das Zahlenlemma von Lebesgue benutzt. Es sei $x_i = w(t_i)$. Wir definieren nun einen Weg $\tilde{w} : [0,1] \to \widetilde{X}$ vermöge

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(t) &= s(w(t), \alpha, 1) && \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\
\tilde{w}(t) &= s(w(t), g_{21}(x_1)\alpha, 2) && \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\
\tilde{w}(t) &= s(w(t), g_{32}(x_2)g_{21}(x_1)\alpha, 3) && \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\
&\vdots \\
\tilde{w}(t) &= s(w(t), g_{n,n-1}(x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot g_{21}(x_1)\alpha, n) && \text{für } t_{n-1} \leq t \leq t_n.
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist stetig, weil

$$s(w(t_j), g_{j,j-1}(x_{j-1}) \cdot \ldots \cdot g_{21}(x_1)\alpha, j) = s(w(t_j), g_{j+1,j}(x_j)g_{j,j-1}(x_{j-1}) \cdot \ldots \cdot g_{21}(x_1)\alpha, j{+}1)$$

nach Definition von s. Es gilt $p \circ \tilde{w} = w$ und $\tilde{w}(0) = s(x_0, \alpha, 1)$ und wegen der Eindeutigkeitsaussage ist dies damit der Lift von w mit Anfangspunkt $s(x_0, \alpha, 1)$. Seien nun w_i' gemäß (2) Wege in U_i von $v_{i-1}(1)$ nach x_{i-1} und $w_i^{''}$ gemäß (2) Wege in U_i von $v_i(1)$ nach x_i. Dann ist $w_i^{''-1}w_i'$ ein Weg in U_i von x_i nach x_{i-1}. Sei schließlich $w_i = w|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Dann ist der Weg $w_i^{''-1}w_i'w_i$ geschlossen in U_i und somit nach Voraussetzung (1) nullhomotop. Es gilt also (wegen (2) sind $v_1 = v_n = x_0 = x_n$ konstante Wege):

$$\begin{aligned}
g_{n,n-1}(x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot g_{21}(x_1) &= [v_n w_n' w_{n-1}^{''-1} v_{n-1}^{-1}] \cdot [v_{n-1} w_{n-1}' w_{n-2}''^{-1} v_{n-2}^{-1}] \cdot \ldots \cdot [v_2 w_2' w_1^{''-1} v_1^{-1}] \\
&= [w_n' w_n w_n^{-1} w_{n-1}^{''-1} w_{n-1}' w_{n-1} w_{n-1}^{-1} w_{n-2}^{''-1} \cdot \ldots \cdot w_2' w_2 w_2^{-1} w_1^{''-1} w_1 w_1^{-1}] \\
&= [w_n^{-1} w_{n-1}^{-1} \cdots w_1^{-1}] \\
&= [(w_1 \cdots w_n)^{-1}] \\
&= [w^{-1}]
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{w}(1) = s(x_0, [w]^{-1}, n)$. Wegen $x_0 \in U_n \cap U_1$ gilt aber, dass $g_{1n}(x_0) = 1$ (alle v's und w's sind konstante Wege), und damit haben wir $\tilde{w}(1) = s(x_0, [w]^{-1}, n) = s(x_0, g_{1n}(x_0)[w]^{-1}, 1) = s(x_0, [w]^{-1}, 1)$. Damit haben wir gezeigt, dass der Lift von w mit Anfangspunkt $s(x_0, \alpha, j)$ in der Tat den Endpunkt $s(x_0, [w]^{-1}\alpha, j)$ hat. Daraus ergibt sich, dass wir je zwei Punkte $s(x_0, \alpha, j)$ und $s(x_1, \beta, i)$ durch einen Weg $w \in \alpha\beta^{-1}$ verbinden können. Damit sind auch je zwei Punkte $s(x_0, \alpha, j)$ und $s(x_1, \beta, i)$ mit $x_0 \in U_j$ und $x_1 \in U_i$ verbindbar: sei w ein Weg in X mit $w(0) = x_0$ und $w(1) = x_1$. Dann lässt sich $L_p(w, s(x_0, \alpha, j))(1)$ schreiben als $s(x_1, \gamma, k)$ für ein geeignetes $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ und ein $k \in J$, so dass $x \in U_k$. Wegen $x_1 \in U_i$ lässt sich dies wiederum schreiben als $s(x_1, g_{ik}(x_1)\gamma, i)$ und dieser Punkt ist mit dem oben gezeigten verbindbar mit $s(x_1, \beta, i)$. Damit ist $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend. Außerdem hat w genau dann eine geschlossene Liftung, wenn $\alpha = [w^{-1}]\alpha$ ist für ein $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $[w^{-1}] = 1$, also wenn w nullhomotop ist. Damit ist die Überlagerung p eine universelle Überlagerung. □

7 Decktransformationen

Definition 13 Eine Deckbewegung einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist ein fasertreuer Homöomorphismus $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$. Es gilt also $p \circ \tilde{f} = p$. Die Deckbewegungen einer Überlagerung bilden offensichtlich eine Gruppe bezüglicher der Hintereinanderausführung, die wir die Deckbewegungsgruppe $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ der Überlagerung nennen wollen.

Lemma 9 *Operiert die Gruppe G eigentlich diskontinuierlich auf dem zusammenhängenden Raum X, so gilt für die Überlagerung $p : X \to X/G$, dass $\mathcal{D} \cong G$.*

Beweis Jedes $g \in G$ ergibt eine Decktransformation. Ist andererseits $\tilde{f} : X \to X$ eine Decktransformation und $x \in X$ fest gewählt, so gibt es wegen $p(x) = p(\tilde{f}(x))$ ein $g \in G$ mit $g(x) = \tilde{f}(x)$. Wegen $p \circ g = p = p \circ \tilde{f}$ sind die Abbildungen $g, \tilde{f} : X \to X$ identisch. □

Satz 13 *Die Deckbewegungsgruppe $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ einer wegzusammenhängenden Überlagerung operiert eigentlich diskontinuierlich auf dem Überlagerungsraum $\tilde{X}$. Insbesondere hat eine von der Identität verschiedene Deckbewegung keine Fixpunkte und je zwei Deckbewegungen, die an einem Punkt übereinstimmen, sind gleich.*

Beweis Für $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sei $\tilde{U}$ ein Blatt über einer gleichmäßig überlagerten Umgebung U von $p(\tilde{x})$ mit $x \in \tilde{U}$. Sei $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ und sei ferner $U \cap \tilde{f}(U) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $\tilde{f}(\tilde{y}) \in \tilde{U}$. Nun gilt $p(\tilde{y}) = p(\tilde{f}(\tilde{y}))$ und außerdem ist $p|_{\tilde{U}}$ ein Homöomorphismus, also insebesondere injektiv; damit folgt $\tilde{f}(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Wegen $p \circ \mathrm{id}_{\tilde{X}} = p = p \circ \tilde{f}$ folgt wiederum mit Satz (5), dass $\tilde{f} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Damit operiert $\mathcal{D}$ eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$. Die Fixpunktaussage ist trivial und die Identitätsaussage folgt mit Satz (5). □

Wir sehen, dass äquivalente Überlagerungen isomorphe Decktransformationsgruppen haben; denn sind $p : \tilde{X} \to X$ und $p' : \tilde{X}' \to X$ zwei äquivalente Überlagerungen mit Decktransformationsgruppen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$, so gilt einerseits $p' \circ f = p$ und $\mathcal{D}' = f^{-1} \circ \mathcal{D} \circ f$. Wir wollen nun die Gruppe $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ aus die Überlagerung charakterisierenden Konjugationsklasse $\mathcal{C}(\tilde{X}, p)$ bestimmen.

Definition 14 Es sei G und U eine Untergruppe von G. Der Normalisator $\mathcal{N}_G(U)$ von U in G ist diejenige Untergruppe von G, die aus allen Elementen g besteht mit $g^{-1}Ug = U$. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt über x_0, so bezeichne $\mathcal{N}p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ den Normalisator der Untergruppe $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$.

Nach dieser Definition ist $\mathcal{N}_G(U) \triangleleft G$ für jede Untergruppe $U \leq G$ und $\mathcal{N}_G(U)$ ist die größte Untergruppe von G, in der U normal ist. Für $U \triangleleft G$ ist $\mathcal{N}_G(U) = G$.

Satz 14 *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung mit lokal wegzusammenhängendem Basisraum und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt über x_0. Dann gibt es zu jedem $\alpha = [w] \in p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ genau eine Decktransformation $\Gamma(\alpha) : \tilde{X} \to \tilde{X}$, die $\tilde{x}_0$ nach $L_p(w, \tilde{x}_0)(1)$ überführt. Dadurch ist eine Funktion $\Gamma : \mathcal{N}p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ definiert, die ein surjektiver Homomorphismus ist mit* $\ker \Gamma = p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ *und damit induziert dieser Homomorphismus einen Gruppenisomorphismus*

$$\Gamma : \mathcal{N}p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)/p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \mathcal{D}(\tilde{X}, p).$$

Damit ist $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ isomorph zu $\mathcal{N}U/U$, wobei $U \leq \pi_1(X, x_0)$ eine zu der Klasse $\mathcal{C}(\tilde{X}, p)$ gehörende Untergruppe ist.

Beweis Es sei $\tilde{x}_0' = L_p(w, \tilde{x}_0)(1)$. Wegen $\alpha \in \mathcal{N}p\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gilt

$$p_\#\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = \alpha^{-1}\mathcal{N}p_\#\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\alpha = p_\#\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0').$$

Da aus dem lokalen Wegzusammenhang von X auch der lokale Wegzusammenhang von $\widetilde{X}$ folgt, können wir die Liftungsprobleme mit $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ bzw. $\tilde{f}'(\tilde{x}'_0) = \tilde{x}_0$ lösen. Genau wie im Beweis des Äquivalenzkriteriums folgt, dass $\tilde{f}$ und $\tilde{f}'$ zueinander inverse sind, dass $\tilde{f}$ also ein Homöomorphismus und eine Deckbewegung ist. Diese ist durch ihren Wert bei $\tilde{x}_0$ eindeutig bestimmt und hängt wegen des Lemmas nur von $\alpha = [w]$ und nicht von der speziellen Wahl von w ab. Damit ist die Existenz klar. Wir definieren $\Gamma(\alpha) = \tilde{f}$ und überprüfen zunächst, ob dies ein Homomorphismus ist: Sei auch $[v] \in \mathcal{N}p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und $\Gamma([v]) = \tilde{g}$. Es gilt:

$$L_p(v{\cdot}w, \tilde{x}_0)(1) = L_p(v, \tilde{x}_0){\cdot}L_p(w, \tilde{g}(\tilde{x}_0))(1) = L_p(w, \tilde{g}(\tilde{x}_0)(1) = \tilde{g}{\circ}L_p(w, \tilde{x}_0)(1) = \tilde{g}{\circ}\tilde{f}(\tilde{x}_0).$$

Dabei gilt das vorletzte Gleichheitszeichen wegen

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{g} \circ L_p(w, \tilde{x}_0) = p \circ L_p(w, \tilde{x}_0) = w = p \circ L_p(w, \tilde{g}(\tilde{x}_0)) \\ \text{und} \quad L_p(w, \tilde{g}(\tilde{x}_0))(0) = \tilde{g}(\tilde{x}_0) = \tilde{g} \circ L_p(w, \tilde{x}_0)(0). \end{aligned}$$

Damit stimmen die Deckbewegungen $\Gamma([v \cdot w]) = \Gamma([v] \cdot [w])$ und $\tilde{g}\tilde{f} = \Gamma([v])\Gamma([w])$ in $\tilde{x}_0$ überein, sind also identisch und somit ist Γ ein Homomorphismus. Ist nun $[w] \in \ker \Gamma$, so folgt $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'_0$, also $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'_0 = L_p(w, \tilde{x}_0)(1)$. Der Lift von w und damit allen Wegen in $[w]$ ist also geschlossen und dies ist mit dem vorher gezeigten genau dann der Fall, wenn $[w] \in p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ist. Zu zeigen bleibt noch die Surjektivität: Es sei $\tilde{f} \in \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ beliebig und $\tilde{w}$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$ und sei $\alpha = [p \circ \tilde{w}] \in \pi_1(X, x_0)$. Weil sowohl π_1 als auch $\#$ kovariante Funktoren sind, folgt dann

$$\alpha^{-1}p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\alpha = p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{f}(\tilde{x}_0)) = p_\#\tilde{f}_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = (p{\circ}\tilde{f})_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Damit gilt $\alpha \in \mathcal{N}p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und da für ein $w \in \alpha$ gilt, dass $\tilde{x}'_0 =$, so folgt mit der Eindeutigkeitsaussage $\Gamma(\alpha) = \tilde{f}$. □

Für eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ wiederum haben wir wegen $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$ sofort das

Korollar 2 *Sei $p : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung des lokal wegzusammenhängenden Raumes X und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt über $x_0 \in X$. Dann gibt es zu jedem $\alpha = [w] \in \pi_1(X, x_0)$ genau eine Decktransformation $\Gamma(\alpha) : \tilde{X} \to \tilde{X}$, die $\tilde{x}_0$ nach $L_p(w, \tilde{x}_0)(1)$ überführt. Die so definierte Funktion $\Gamma : \pi_1(X, x_0) \to \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ ist ein Isomorphismus von Gruppen.*

Wir haben nun die Mittel zusammen, um bis auf Äquivalenz die Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$ eines Raumes X durch Untergruppen der Fundamentalgruppe von X zu bestimmen. Mit dem Äquivalenzkriterium wissen wir, dass die Anzahl der Überlagerungen nach oben durch die Anzahl der Konjugationsklassen beschränkt ist. Wir werden nun zeigen, dass es in der Tat genausoviele Überlagerungen wie Konjugationsklassen gibt.

Satz 15 *Sei X ein hinreichend zusammenhängender Raum mit Basispunkt x_0. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$ eine wegzusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ und einen Punkt $\tilde{x}_0$ über x_0 mit $p_\#\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$.*

Beweis Sei $q : \hat{X} \to X$ die universelle Überlagerung von X und sei $\hat{x}_0 \in q^{-1}(x_0)$. Sei ferner $\Gamma : \pi_1(X, x_0) \to \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ unser Isomorphismus aus dem obigen Korollar. Dann ist $G = \Gamma(H) \subset \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ eine Untergruppe, also eine Gruppe von Homöomorphismen von $\hat{X}$. Der Bahnenraum $\widetilde{X} = \hat{X}/G$ ist wegzusammenhängend, weil $\hat{X}$ wegzusammenhängend ist und $\tilde{X}$ ein stetiges Bild von $\hat{X}$ unter der Projektionsabbildung $s : \hat{X} \to \tilde{X}$ ist. Die Projektion $p : \tilde{X} \to X$ mit $p(\langle\hat{x}\rangle) = q(\hat{x})$ ist ebenfalls stetig; es ist nämlich $q = p \circ s$ und q ist stetig, also gilt für eine offene Menge

$U \subset X$, dass $q^{-1}(U) = s^{-1}(p^{-1}(U))$ offen ist, aber nach Definition der Quotiententopologie ist $s^{-1}(p^{-1}(U))$ genau dann offen, wenn $p^{-1}(U)$ offen ist. Wir zeigen nun, dass p eine Überlagerungsabbildung ist: Zunächst bemerken wir, dass $s : \hat{X} \to \hat{X}$ eine Überlagerung ist. Denn operiert $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ eigentlich diskontinuierlich auf $\hat{X}$, so operiert auch jede Untergruppe eigentlich diskontinuierlich auf diesem Raum. Für $x \in X$ sei nun U eine bezüglich q gleichmäßig überlagerte Umgebung von x. Wir nennen zwei Blätter $\hat{U}$ und $\hat{U}'$ äquivalent, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $\hat{U}' = g\hat{U}$, also wenn $s(\hat{U}) = s(\hat{U}')$ ist. Das ist eine Äquivalenzrelation. Wir wählen nun aus jeder Äquivalenzklasse ein Blatt aus und erhalten so die Blätter $\hat{U}_j$ über U. Dann ist $p^{-1}(U) = s(q^{-1}(U)) = \cup_j s(\hat{U}_j)$. Weil s stetig ist, sind die $s(\hat{U}_j)$ paarweise disjunkt und werden unter p homöomorph abgebildet, da sowohl $q|_{\hat{U}_j}$ als auch $s|_{\hat{U}_j}$ nach Konstruktion Homöomorphismen sind. Damit ist $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Nun sei $\tilde{x}_0 = s(\hat{x}_0) \in X$ ein Punkt über $x_0 \in X$. Für $\alpha = [w] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $L_p(w, \tilde{x_0}) = s \circ L_p(w, \hat{x}_0)$, da beide Wege von p auf w projiziert werden und denselben Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ haben. Dieser Weg ist genau dann geschlossen, wenn der Anfangspunkt $\hat{x}_0$ und der Endpunkt $\Gamma(\alpha)(\hat{x}_0)$ von $L_q(w, \hat{x}_0)$ dasselbe Bild unter der Abbildung s haben. Das gilt genau dann, wenn $\Gamma(\alpha)(\hat{x}_0) = g(\hat{x}_0)$ ist für ein $g \in G$. Dann gilt aber $\Gamma(\alpha) \in G = \Gamma(H)$. Also ist $\alpha \in H$, weil Γ ein Isomorphismus ist. Da aber andererseits ein geschlossener Weg w in X mit Anfangspunkt x_0 genau dann einen geschlossenen Lift besitzt, wenn $[w] \in p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gilt, folgt $H = p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Damit sind wir fertig.

□

Bedenken wir nun, dass die Anzahl der Überlagerungen nach dem Äquivalenzkriterium begrenzt ist, so haben wir gezeigt, dass

Satz 16 *Die universelle Überlagerung eines hinreichend zusammenhängenden Raumes X überlagert jede wegzusammenhängende Überlagerung von X.*

Beweis Die Abbildung s aus dem letzten Beweis ist eine Überlagerung und mehr Überlagerungen als die konstruierten kann es mit dem Äquivalenzkriterium nicht geben. □

Satz 17 (Klassifikationssatz für Überlagerungen) *Sei X ein hinreichend zusammenhängender Raum mit Basispunkt x_0. Ordnen wir jeder wegzusammenhängenden Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ihre charakteristische Konjugationsklasse $\mathcal{C}(\tilde{X}, p)$ zu, so erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen der wegzusammenhängenden Überlagerungen von X und der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.*

8 Homologie

Wir stellen hier die Grundzüge der Homologietheorien dar. Wir folgen erst [TK04], stellen am Ende aber auch alternative Homologietheorien dar, wie sie in der algebraischen Topologie vorrangig behandelt werden. Dabei stellen wir das Material wie in [Mas80] oder [Mun75] vor. Interessanterweise sind diese Homologietheorien alle (in einem gewissen Sinne von Äquivalenz) gleichwertig. Jedem topologischen Raum X soll eine Folge von abelschen Gruppen $H_0(X), H_1(X), H_2(X), \dots$ und jeder stetigen Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen eine Folge von Homomorphismen

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y), \quad n = 0, 1, \dots$$

zugeordnet werden. Wir nennen $H_n(X)$ die n-dimensionale Homologiegruppe von X und f_* den von f induzierten Homomorphismus. Die wichtigsten Eigenschaften einer Homologietheorie, die es herauszuarbeiten gilt, sind die folgenden:

1. Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, so ist f_* ein Isomorphismus für alle n. Die Struktur der Gruppen $H_n(X)$ hängt also nur von der Geometrie von X ab. Aber es gilt noch mehr: Ist f eine Homotopie-Äquivalenz, so ist f_* ein Isomorphismus. Also hängt die algebraische Struktur von $H_n(X)$ nur vom Homotopietyp von X ab.

2. Sind zwei Abbildungen $f_0, f_1 : X \to Y$ homotop, so stimmen die induzierten Homomorphismen f_{0*}, f_{1*} für alle n überein. Also hängt der von f_0 induzierte Homomorphismus f_{0*} nur von der Homotopieklasse von f_0 ab. Damit können wir z. B. zeigen, dass bestimmte Abbildungen nicht homotop zueinander sind.

3. Für jeden topologischen Raum X ist $H_0 = (X)$ eine freie abelsche Gruppe und ihr Rang ist gleich der Mächtigkeit der Wegzusammenhangskomponenten von X.

4. Ist X ein wegzusammenhängender Raum, so ist $H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1, \pi_1]$.

Definition 15 Ein absteigender Kettenkomplex ist eine Familie $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen C_n und Homomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, die wir Randoperatoren nennen wollen, so dass $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Wir nennen den Komplex einen freien Komplex, wenn die Gruppen C_n freie abelsche Gruppen sind. Ferner nennen wir $Z_n := \ker \partial_n$ die Zykel von $\mathcal{C}$ und die Untergruppen $B_n := \operatorname{im} \partial_{n+1}$ die Ränder.

Es gilt $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$ gilt. Für den Fall, dass an der Stelle n gilt $\operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$, sagen wir, dass der Komplex an der Stelle n exakt ist. Ein Komplex, der überall exakt ist, heißt auch exakte Sequenz.

Definition 16 Für einen absteigenden Kettenkomplex $\mathcal{C}$ definieren wir $H_n(\mathcal{C}) = Z_n/B_n$ als die n-te Homologiegruppe von $\mathcal{C}$.

Diese Gruppe ist wohldefiniert, weil Z_n als Kern normal in C_n ist. Weiter ist $H_n(\mathcal{C})$ trivial, wenn der Kettenkomplex an der Stelle n exakt ist. Wir interessieren uns also für Komplexe, wo gerade dies nicht der Fall ist.

Beispiel 8.1
Der Homomorphismus $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ mit $\pi(n) = n \pmod 2$ ist ein surjektiver Homomorphismus von Gruppen. Wir haben also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

mit $\phi(n) = 2n$. Der erste Isomorphiesatz für Gruppen sagt uns dann, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$.

Jetzt bringen wir einige einfache Tatsachen über kurze exakte Sequenzen.

Lemma 10

$$G_1 \xrightarrow{\psi} G_0 \xrightarrow{\phi} 0$$

ist genau dann eine kurze exakte Sequenz, wenn ψ surjektiv ist.

Beweis Die Sequenz ist genau dann exakt, wenn $\operatorname{im} \psi = \ker \phi$. Nun ist $\ker \phi = G_0$ und damit ist die Sequenz genau dann exakt, wenn $\operatorname{im} \psi = G_0$. □

Lemma 11 *Die kurze Sequenz*

$$0 \xrightarrow{\phi} G_1 \xrightarrow{\psi} G_0$$

ist genau dann exakt, wenn ψ injektiv ist.

Beweis Es ist $\operatorname{im}\phi = \{0\}$. Also ist $\ker\psi = \{0\}$ genau dann, wenn die Sequenz exakt ist; und das ist genau dann der Fall, wenn ψ injektiv ist. $\square$

Lemma 12 *Für eine kurze exakte Sequenz*

$$G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \xrightarrow{\psi_1} G_0$$

sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. ψ_3 *ist surjektiv,*
2. ψ_2 *ist der triviale Homomorphismus*
3. ψ_1 *ist injektiv.*

Definition 17 Wir sagen, dass eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow 0$$

spaltet, wenn es eine Untergruppe $H \leq G_2$ gibt, so dass $G_2 \cong H \oplus \operatorname{im}\psi_3$.

Beispiel 8.2
Es sei (X, A) ein kubisches Paar mit $A \subset X$. Dann spaltet für $k \in \mathbb{Z}$ die kurze exakte Sequenz des Paares:

$$0 \longrightarrow C_k(A) \xrightarrow{\iota_k} C_k(X) \xrightarrow{\pi_k} C_k(X, A) \longrightarrow 0.$$

Es ist nämlich $C_k(X) = C_k(A) \oplus H = \iota_k\left(C_k(A)\right) \oplus H$ mit

$$H = \bigoplus_{Q \in \mathcal{K}_k(X) \setminus \mathcal{K}_k(A)} \mathbb{Z}\hat{Q}.$$

Lemma 13 *Für eine kurze exakte Sequenz von Gruppen*

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow 0$$

ist äquivalent:

1. *Die Sequenz spaltet,*
2. *Der Homomorphismus ψ_3 hat ein Linksinverses: Es gibt einen Homomorphismus $\pi : G_2 \to G_3$, so dass $\psi_3\pi = \mathrm{id}_{G_2}$ ist.*
3. *Der Homomorphismus ψ_2 hat ein Rechtsinverses: Es gibt einen Homomorphismus $\kappa : G_1 \to G_2$, so dass $\psi_2\kappa = \mathrm{id}_{G_1}$.*

Ein erstes Beispiel für eine Diagrammjagd, die in den späteren Vorträgen benötigt wird, ist das folgende

Lemma 14 (5er Lemma) *Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Gruppen und Homomorphismen mit exakten Zeilen. Sind ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 und ϕ_5 Isomorphismen, so ist auch ϕ_3 ein Isomorphismus.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\phi_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\phi_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\phi_4"'] & A_5 \arrow[d, "\phi_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Proof Zuerst zeigen wir, dass ϕ_3 injektiv ist. Sei also $a_3 \in \ker \phi_3$. Dann ist $\phi_3(a_3) = 0$ und $\beta_3\phi_3(a_3) = 0$. Weil jedes kleine Diagramm kommutiert, ist $\beta_3\phi_3(a_3) = \phi_4\alpha_3(a_3) = 0$. Weil ϕ_4 injektiv ist, folgt $\alpha_3(a_3) = 0$. Weil die obere Zeile exakt ist, gibt es ein $a_2 \in A_2$, so dass $\alpha_2(a_2) = a_3$. Dann ist $\phi_3\alpha_2(a_2) = \phi_3(a_3) = 0$ und wieder $\beta_2\phi_2(a_2) = 0$. Also ist $\phi_2(a_2) \in \ker \beta_2$. Weil auch die untere Zeile exakt ist, so gibt es ein $b_1 \in B_1$ mit $\beta_1(b_1) = \phi_2(a_2)$. Weil ϕ_1 surjektiv ist, gibt es zu b_1 genau ein $a_1 \in A_1$ mit $\phi_1(a_1) = b_1$. Damit erhalten wir

$$\phi_1(a_1) = b_1, \quad \beta_1\phi_1(a_1) = \phi_2\alpha_1(a_1) = \phi_2(a_2).$$

Weil ϕ_2 injektiv ist, folgt aus $\phi_2\alpha_1(a_1) = \phi_2(a_2)$, dass $\alpha_1(a_1) = a_2$ sein muß. Weil $a_3 = \alpha_2(a_2) = \alpha_2\alpha_1(a_1)$ gilt, und mit der Exaktheit $\alpha_2\alpha_1 = 0$ ist, haben wir $a_3 = 0$. Also ist ϕ_3 injektiv. Nun zur Surjektivität. Es sei also ein $b_3 \in B_3$ vorgelegt. Wir wollen die Existenz eines $a_3 \in A_3$ zeigen mit $\phi_3(a_3) = b_3$. Zu $\beta_3(b_3)$ gibt es ein $a_4 \in A_4$, so dass $\phi_4(a_4) = \beta_3(b_3)$. Mit $\beta_4\beta_3 = 0$ erhalten wir $\beta_4\phi_4(a_4) = \beta_4\beta_3(b_3) = 0$. Mit der Kommutativität folgt wieder $\phi_5\alpha_4(a_4) = 0$. Also ist $\alpha_4(a_4) = 0$ und es gibt ein $a_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(a_3) = a_4$. Dann ist

$$\beta_3(b_3) = \phi_4(a_4) = \phi_4\alpha_3(a_3) = \beta_3\phi_3(a_3).$$

Also ist $\beta_3(b_3) - \beta_3\phi_3(a_3) = 0$ und $b_3 - \phi_3(a_3) \in \ker \beta_3$. Dann gibt es ein $b_2 \in B_2$ mit $\beta_2(b_2) = b_3 - \phi_3(a_3)$. Weil ϕ_2 ein Isomorphismus ist, gibt es zu b_2 genau ein $a_2 \in A_2$, so dass $\phi_2(a_2) = b_2$ und es folgt $\beta_2\phi_2(a_2) = b_3 - \phi_3(a_3)$, also wieder $\beta_2\phi_2(a_2) = \phi_3\alpha_2(a_2) = b_3 - \phi_3(a_3)$. Damit ist $b_3 = \phi_3\alpha_2(a_2) + \phi_3(a_3) = \phi_3(\alpha_2(a_2) + a_3)$ und wir sind fertig. □

Es seien $\mathcal{A} = \left(A_k, \partial_k^{\mathcal{A}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\mathcal{B} = \left(B_k, \partial_k^{\mathcal{B}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{C} = \left(C_k, \partial_k^{\mathcal{C}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ Kettenkomplexe. Ferner sei 0 der triviale Kettenkomplex, in dem jede Gruppe gleich der trivialen Gruppe ist. Ferner seien $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Kettenabbildungen, d. h. es ist $\phi = (\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von Homomorphismen $\phi_k : A_k \to B_k$, so dass außerdem noch für alle k gilt, dass $\partial_k\phi_{k-1} = \phi_k\partial_k$. Analog für $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. In dem folgenden Diagramm sollen also alle kleinen Diagrame kommutieren.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{k+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{k-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & B_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & B_k & \xrightarrow{\partial_k} & B_{k-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

nennen wir eine kurze exakte Sequenz, wenn für alle k die Sequenzen

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{\phi_k} B_k \xrightarrow{\psi_k} C_k \longrightarrow 0$$

kurz und exakt sind.

Für diese Darstellung des Materials und sozusagen wegweisend für die weiteren Anwendungen ist der folgende

Satz 18 *Es sei X ein zusammenhängender Raum, der eine kubische Menge ist und $f : X \to X$ eine stetige Abbildung. Dann*

$$f_* : H_0(X) \to H_0(X)$$

die Identität.

Beweis Ist M_f azyklisch-wertig, so ist in der Homologie die Abbildung f_{*0} : $H_0(X) \to H_0(X)$ durch eine passende Kettenabbildung $\phi_0 : C_0(X) \to C_0(X)$ bestimmt, die wiederum aus M_f gewonnen werden kann. Es sei also $Q \in \mathcal{K}_0(X)$. Per Definition ist $M_f(Q) = \mathrm{ch}\,(f(Q))$, was ein Elementarwürfel ist. Sei $P \in \mathcal{K}_0(\mathrm{ch}\,(f(Q)))$. Dann definieren wir $\phi_0(\hat{Q}) = \hat{P}$ und es ist $f_*([\hat{Q}]) = [\hat{P}]$. Nach [TK04] ist $[\hat{Q}] = [\hat{P}] \in H_0(X)$ und wir haben die Identität auf $H_0(X)$. Für den Fall, dass M_f nicht azyklsich-wertig ist, müssen wir den Prozess der Umskalierung durchführen. $\square$

Literatur

[Mas80] W. S. Massey. *Singular Homology Theory.* Springer-Verlag, 1980.

[Mun75] James Munkres. *Topology: A first course.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[TK04] M. Mrozek T. Kaczynski, K. Mischaikow. *Computational Homology.* Springer-Verlag, 2004.