Abbildungsgrad

Marc Lange

28.8.'07

Gliederung

Gliederung

Der Kettenkomplex $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Wobei:

- C_k die freie abelsche Gruppe der k-Ketten (von X) ist,
- ∂ die Randabbildung $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$,
- $\partial_{k-1} \circ \partial_k = \partial^2 = 0$

  $\Rightarrow im\partial_k \subset ker\partial_{k-1}$

Der Kettenkomplex $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Wobei:

- C_k die freie abelsche Gruppe der k-Ketten (von X) ist,
- ∂ die Randabbildung $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$,
- $\partial_{k-1} \circ \partial_k = \partial^2 = 0$

$\Rightarrow im\partial_k \subset ker\partial_{k-1}$

Der Kettenkomplex $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Wobei:

- C_k die freie abelsche Gruppe der k-Ketten (von X) ist,
- ∂ die Randabbildung $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$,
- $\partial_{k-1} \circ \partial_k = \partial^2 = 0$

$\Rightarrow im\partial_k \subset ker\partial_{k-1}$

Der Kettenkomplex $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Wobei:

- C_k die freie abelsche Gruppe der k-Ketten (von X) ist,
- ∂ die Randabbildung $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$,
- $\partial_{k-1} \circ \partial_k = \partial^2 = 0$

  $\Rightarrow im \partial_k \subset ker \partial_{k-1}$

Der Kettenkomplex $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Wobei:

- C_k die freie abelsche Gruppe der k-Ketten (von X) ist,
- ∂ die Randabbildung $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$,
- $\partial_{k-1} \circ \partial_k = \partial^2 = 0$

  $\Rightarrow im\partial_k \subset ker\partial_{k-1}$

Kettenabbildungen

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Kettenkomplexe mit Gruppen und Abbildungen $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\mathcal{C}' := \{C'_k, \partial'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow C'_{k+1} \xrightarrow{\partial'} C'_k \xrightarrow{\partial'} C'_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Kettenabbildungen

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Kettenkomplexe mit Gruppen und Abbildungen $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\mathcal{C}' := \{C'_k, \partial'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow C'_{k+1} \xrightarrow{\partial'} C'_k \xrightarrow{\partial'} C'_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Kettenabbildungen

Eine Kettenabbildung $\varphi := \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Familie von Homomorphismen $\varphi_k : C_k \to C'_k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_k \arrow[r, "\partial'"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Also für die gilt:

$\partial' \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \partial$

Oder kürzer:

$\partial\varphi = \varphi\partial$

Kettenabbildungen

Eine Kettenabbildung $\varphi := \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Familie von Homomorphismen $\varphi_k : C_k \to C'_k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_k \arrow[r, "\partial'"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Also für die gilt:
$\partial' \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \partial$

Oder kürzer:
$\partial\varphi = \varphi\partial$

Kettenabbildungen

Eine Kettenabbildung $\varphi := \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Familie von Homomorphismen $\varphi_k : C_k \to C'_k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_k \arrow[r, "\partial'"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Also für die gilt:

$\partial' \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \partial$

Oder kürzer:

$\partial\varphi = \varphi\partial$

Der induzierte Homomorphismus φ_*

Für Kettenabbildungen gilt:

- $\varphi(ker\partial) \subset ker\partial'$
- $\varphi(im\partial) \subset im\partial'$
- Da $im\partial_{k+1} \subset ker\partial_k$, folgt: $\varphi(im\partial_{k+1}) \subset \varphi(ker\partial_k)$

Also induziert eine Kettenabbildung einen (deswegen wohldefinierten) Homomorphismus: $\varphi_* : H_k \to H'_k$, wobei $H_k = Z_k / B_k$ die k-te Homologiegruppe sei.

Der induzierte Homomorphismus φ_*

Für Kettenabbildungen gilt:

- $\varphi(ker\partial) \subset ker\partial'$
- $\varphi(im\partial) \subset im\partial'$
- Da $im\partial_{k+1} \subset ker\partial_k$, folgt: $\varphi(im\partial_{k+1}) \subset \varphi(ker\partial_k)$

Also induziert eine Kettenabbildung einen (deswegen wohldefinierten) Homomorphismus: $\varphi_* : H_k \to H'_k$, wobei $H_k = Z_k/B_k$ die k-te Homologiegruppe sei.

Der induzierte Homomorphismus φ_*

Für Kettenabbildungen gilt:

- $\varphi(ker\partial) \subset ker\partial'$
- $\varphi(im\partial) \subset im\partial'$
- Da $im\partial_{k+1} \subset ker\partial_k$, folgt: $\varphi(im\partial_{k+1}) \subset \varphi(ker\partial_k)$

Also induziert eine Kettenabbildung einen (deswegen wohldefinierten) Homomorphismus: $\varphi_* : H_k \to H'_k$, wobei $H_k = Z_k / B_k$ die k-te Homologiegruppe sei.

Der induzierte Homomorphismus φ_*

Für Kettenabbildungen gilt:

- $\varphi(ker\partial) \subset ker\partial'$
- $\varphi(im\partial) \subset im\partial'$
- Da $im\partial_{k+1} \subset ker\partial_k$, folgt: $\varphi(im\partial_{k+1}) \subset \varphi(ker\partial_k)$

Also induziert eine Kettenabbildung einen (deswegen wohldefinierten) Homomorphismus: $\varphi_* : H_k \to H'_k$, wobei $H_k = Z_k/B_k$ die k-te Homologiegruppe sei.

Der induzierte Homomorphismus φ_*

Für Kettenabbildungen gilt:

- $\varphi(ker\partial) \subset ker\partial'$
- $\varphi(im\partial) \subset im\partial'$
- Da $im\partial_{k+1} \subset ker\partial_k$, folgt: $\varphi(im\partial_{k+1}) \subset \varphi(ker\partial_k)$

Also induziert eine Kettenabbildung einen (deswegen wohldefinierten) Homomorphismus: $\varphi_* : H_k \rightarrow H'_k$, wobei $H_k = Z_k / B_k$ die k-te Homologiegruppe sei.

Der induzierte Homomorphismus f_*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

Sie induziert eine Kettenabbildung $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}'(Y)$,
also auch einen Homomorphismus $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

Hierbei sei $H_*(X)$ die Menge aller Homologiegruppen von X.

Der induzierte Homomorphismus f_*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

Sie induziert eine Kettenabbildung $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}'(Y)$, also auch einen Homomorphismus $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

Hierbei sei $H_*(X)$ die Menge aller Homologiegruppen von X.

Der induzierte Homomorphismus f_*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

Sie induziert eine Kettenabbildung $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}'(Y)$,
also auch einen Homomorphismus $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

Hierbei sei $H_*(X)$ die Menge aller Homologiegruppen von X.

Eigenschaften von f_*

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$
  (${\cdot}_*$ ist also ein kovarianter Funktor ${\cdot}_* : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grp}$.)
- $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$
  - $f : X \to Y$ Homotopieäquivalenz $\Rightarrow f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ Isomorphismus.
  - Bemerkung:
    Damit folgt aus $X \simeq *$, also X zusammenziehbar:
    $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$

Eigenschaften von f_*

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$

  ($\cdot_*$ ist also ein kovarianter Funktor $\cdot_*$: **Top** $\to$ **Grp** .)
- $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$
  - $f : X \to Y$ Homotopieäquivalenz $\Rightarrow f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ Isomorphismus.
  - Bemerkung:

    Damit folgt aus $X \simeq *$, also X zusammenziehbar:

    $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$

Eigenschaften von f_*

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$

  ($\cdot_*$ ist also ein kovarianter Funktor $\cdot_*$: **Top** $\rightarrow$ **Grp** .)
- $f \simeq g : X \rightarrow Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$
  - $f : X \rightarrow Y$ Homotopieäquivalenz $\Rightarrow f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ Isomorphismus.
  - Bemerkung:
    Damit folgt aus $X \simeq *$, also X zusammenziehbar:
    $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$

Eigenschaften von f_*

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$

  ($\cdot_*$ ist also ein kovarianter Funktor $\cdot_*$: **Top** $\rightarrow$ **Grp** .)
- $f \simeq g : X \rightarrow Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$
  - $f : X \rightarrow Y$ Homotopieäquivalenz $\Rightarrow f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ Isomorphismus.
  - Bemerkung:
    Damit folgt aus $X \simeq *$, also X zusammenziehbar:
    $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$

Eigenschaften von f_*

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$

  ($\cdot_*$ ist also ein kovarianter Funktor $\cdot_*$: **Top** $\rightarrow$ **Grp** .)
- $f \simeq g : X \rightarrow Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$
  - $f : X \rightarrow Y$ Homotopieäquivalenz $\Rightarrow f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ Isomorphismus.
  - Bemerkung:
    Damit folgt aus $X \simeq *$, also X zusammenziehbar:
    $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$

Gliederung

Eine Rechenhilfe

Satz:
Sei X topologischer Raum,
$A \subset X$ ein abgeschlossenes (nicht-leeres) Deformationsretrakt einer Umgebung von A in X, dann ist die Sequenz:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_n(X/A)$$

$$\xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_{n-1}(X/A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

exakt für ein geeignetes ∂ und $\tilde{H}_n(X)$ die Homologiegruppen aus dem augmentierten Kettenkomplex.

Eine Rechenhilfe

Satz:
Sei X topologischer Raum,
$A \subset X$ ein abgeschlossenes (nicht-leeres) Deformationsretrakt einer Umgebung von A in X, dann ist die Sequenz:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_n(X/A)$$

$$\xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_{n-1}(X/A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

exakt für ein geeignetes ∂ und $\tilde{H}_n(X)$ die Homologiegruppen aus dem augmentierten Kettenkomplex.

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Beweis:

Betrachte als $(X, A) := (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, dann gilt $X/A = \mathbb{S}^n$.

- $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar für alle n, also gilt

$$H_k(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\mathbb{S}^0$ besteht aus genau zwei Punkten, also zwei Zusammenhangskomponenten und somit gilt:

$$H_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.}$$

$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Beweis:

Betrachte als $(X, A) := (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, dann gilt $X/A = \mathbb{S}^n$.

- $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar für alle n, also gilt
$$H_k(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- $\mathbb{S}^0$ besteht aus genau zwei Punkten, also zwei Zusammenhangskomponenten und somit gilt:
$$H_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ bzw.}$$
$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Beweis:
Betrachte als $(X, A) := (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, dann gilt $X/A = \mathbb{S}^n$.

- $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar für alle n, also gilt
$$H_k(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- $\mathbb{S}^0$ besteht aus genau zwei Punkten, also zwei Zusammenhangskomponenten und somit gilt:
$$H_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ bzw.
$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Beweis:

Betrachte als $(X, A) := (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, dann gilt $X/A = \mathbb{S}^n$.

- $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar für alle n, also gilt
  $$H_k(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- $\mathbb{S}^0$ besteht aus genau zwei Punkten, also zwei Zusammenhangskomponenten und somit gilt:
  $$H_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.}$$
  $$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Beweis:
Betrachte als $(X, A) := (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, dann gilt $X/A = \mathbb{S}^n$.

- $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar für alle n, also gilt
  $$H_k(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- $\mathbb{S}^0$ besteht aus genau zwei Punkten, also zwei Zusammenhangskomponenten und somit gilt:
  $$H_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ bzw.}$$
  $$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion: $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:
$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).
Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. □

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = im\pi_* = ker\partial \quad \Rightarrow \partial$ injektiv.
- $im\partial = ker\iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \partial$ surjektiv.

Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion:
$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. $\square$

Gliederung

Motivation

- Für eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ($n > 0$), ergibt sich eine induzierte Abbildung $f_* : H_*(\mathbb{S}^n) \to H_*(\mathbb{S}^n)$.
- Da gilt:
$$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & sonst \end{cases}$$
ist der einzig interessante induzierte Homomorphismus die Abbildung $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Motivation

- Für eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n > 0)$, ergibt sich eine induzierte Abbildung $f_* : H_*(\mathbb{S}^n) \to H_*(\mathbb{S}^n)$.
- Da gilt:
  $$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & sonst \end{cases}$$
  ist der einzig interessante induzierte Homomorphismus die Abbildung $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Motivation

- Für eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ($n > 0$), ergibt sich eine induzierte Abbildung $f_* : H_*(\mathbb{S}^n) \to H_*(\mathbb{S}^n)$.
- Da gilt:

  $$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & sonst \end{cases}$$

  ist der einzig interessante induzierte Homomorphismus die Abbildung $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Motivation

- Für eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n > 0)$, ergibt sich eine induzierte Abbildung $f_* : H_*(\mathbb{S}^n) \to H_*(\mathbb{S}^n)$.
- Da gilt:
  $$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & sonst \end{cases}$$
  ist der einzig interessante induzierte Homomorphismus die Abbildung $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Motivation

Für $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wähle einen Erzeuger e von $\mathbb{Z}$, dann gilt:

- $f_{*n}(e) = d \cdot e$.
- Hätten wir $-e$ gewählt, so folgt:
- $f_{*n}(-e) = -f_{*n}(e) = -(d \cdot e) = d \cdot (-e)$.
- Wir erhalten also in beiden Fällen dasselbe d.

Motivation

Für $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wähle einen Erzeuger e von $\mathbb{Z}$, dann gilt:

- $f_{*n}(e) = d \cdot e$.
- Hätten wir $-e$ gewählt, so folgt:
- $f_{*n}(-e) = -f_{*n}(e) = -(d \cdot e) = d \cdot (-e)$.
- Wir erhalten also in beiden Fällen dasselbe d.

Motivation

Für $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wähle einen Erzeuger e von $\mathbb{Z}$, dann gilt:

- $f_{*n}(e) = d \cdot e$.
- Hätten wir $-e$ gewählt, so folgt:
- $f_{*n}(-e) = -f_{*n}(e) = -(d \cdot e) = d \cdot (-e)$.
- Wir erhalten also in beiden Fällen dasselbe d.

Motivation

Für $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wähle einen Erzeuger e von $\mathbb{Z}$, dann gilt:

- $f_{*n}(e) = d \cdot e$.
- Hätten wir $-e$ gewählt, so folgt:
- $f_{*n}(-e) = -f_{*n}(e) = -(d \cdot e) = d \cdot (-e)$.
- Wir erhalten also in beiden Fällen dasselbe d.

Definition

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n > 0)$ eine stetige Abbildung und f_* der auf den Homologiegruppen induzierte Homomorphismus.

- Gilt für einen Erzeuger e von $H_n(\mathbb{S}^n)$:
  $f_{*n}(e) = d \cdot e$
- so setze: $\deg f := d$.
- Wir nennen $\deg f$ den Abbildungsgrad von f.

Definition

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n > 0)$ eine stetige Abbildung und f_* der auf den Homologiegruppen induzierte Homomorphismus.

- Gilt für einen Erzeuger e von $H_n(\mathbb{S}^n)$: $f_{*n}(e) = d \cdot e$
- so setze: $\deg f := d$.
- Wir nennen $\deg f$ den Abbildungsgrad von f.

Definition

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n > 0)$ eine stetige Abbildung und f_* der auf den Homologiegruppen induzierte Homomorphismus.

- Gilt für einen Erzeuger e von $H_n(\mathbb{S}^n)$: $f_{*n}(e) = d \cdot e$
- so setze: $\deg f := d$.
- Wir nennen $\deg f$ den Abbildungsgrad von f.

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
   - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
   - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
   - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
   - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
   - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
   - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
   - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
   - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
   - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
   - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
   - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
   - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
   - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
   - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
   - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
   - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
   - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
   - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
   - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
   - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
   - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
   - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
   - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
   - also $f \simeq \text{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
   - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
    - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
    - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
    - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
    - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
    - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
    - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
    - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
    - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
    - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
    - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften I

1. $\deg id = 1$,
   - denn $id_* = id$
2. f nicht surjektiv $\Rightarrow \deg f = 0$
   - Sei $x_0 \notin f(\mathbb{S}^n)$, dann gilt:
   - $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$
   - also $f \simeq \mathrm{const.}$
3. $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
   - denn $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Eigenschaften II

1. $\deg fg = \deg f \deg g$, denn $(fg)_* = f_* g_*$
   - Ist f Homotopieäquivalenz, so folgt:
   - $\deg f = \pm 1$, denn $fg \simeq id \Rightarrow \deg f \deg g = 1$
   - (Dies gilt natürlich insbesondere für Homöomorphismen.)
2. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
3. Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$
   - $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen

Grad(Spiegelung) $= -1$

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.

Beweisskizze (über Simplex-Homologie):

- $\mathbb{S}^n$ trägt eine Δ-Komplex-Struktur, wobei die obere Hemisphäre der n-Simplex Δ_1^n und die untere der n-Simplex Δ_2^n sei.
- Die n-Kette $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ist dann Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (wegen Exaktheit einer Simplex-Homologie-Sequenz).
- Die induzierte Abbildung $f_\#$ vertauscht Δ_1^n und Δ_2^n, also gilt:
- $f_\#(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$
- Also gilt $\deg f = -1$.

Grad(Spiegelung) $= -1$

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.

Beweisskizze (über Simplex-Homologie):

- $\mathbb{S}^n$ trägt eine Δ-Komplex-Struktur, wobei die obere Hemisphäre der n-Simplex Δ_1^n und die untere der n-Simplex Δ_2^n sei.
- Die n-Kette $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ist dann Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (wegen Exaktheit einer Simplex-Homologie-Sequenz).
- Die induzierte Abbildung $f_\#$ vertauscht Δ_1^n und Δ_2^n, also gilt:
- $f_\#(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$
- Also gilt $\deg f = -1$.

Grad(Spiegelung) $= -1$

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.

Beweisskizze (über Simplex-Homologie):

- $\mathbb{S}^n$ trägt eine Δ-Komplex-Struktur, wobei die obere Hemisphäre der n-Simplex Δ_1^n und die untere der n-Simplex Δ_2^n sei.
- Die n-Kette $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ist dann Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (wegen Exaktheit einer Simplex-Homologie-Sequenz).
- Die induzierte Abbildung $f_\#$ vertauscht Δ_1^n und Δ_2^n, also gilt:
- $f_\#(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$
- Also gilt $\deg f = -1$.

Grad(Spiegelung) $= -1$

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.

Beweisskizze (über Simplex-Homologie):

- $\mathbb{S}^n$ trägt eine Δ-Komplex-Struktur, wobei die obere Hemisphäre der n-Simplex Δ_1^n und die untere der n-Simplex Δ_2^n sei.
- Die n-Kette $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ist dann Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (wegen Exaktheit einer Simplex-Homologie-Sequenz).
- Die induzierte Abbildung $f_\#$ vertauscht Δ_1^n und Δ_2^n, also gilt:
- $f_\#(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$
- Also gilt $\deg f = -1$.

Grad(Spiegelung) $= -1$

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.

Beweisskizze (über Simplex-Homologie):

- $\mathbb{S}^n$ trägt eine Δ-Komplex-Struktur, wobei die obere Hemisphäre der n-Simplex Δ_1^n und die untere der n-Simplex Δ_2^n sei.
- Die n-Kette $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ist dann Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (wegen Exaktheit einer Simplex-Homologie-Sequenz).
- Die induzierte Abbildung $f_\#$ vertauscht Δ_1^n und Δ_2^n, also gilt:
- $f_\#(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$
- Also gilt $\deg f = -1$.

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$
   Beweis:
   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t)\cdot f(x) - tx}{\|(1-t)\cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$
       $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   Beweis:

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t)\cdot f(x) - tx}{\|(1-t)\cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

       $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   <u>Beweis:</u>

   - Gelte $f(x) \neq x \;\; \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:

     $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   Beweis:

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:

     $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   Beweis:

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:

     $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$
   Beweis:
   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   <u>Beweis:</u>

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$
   Beweis:
   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t)\cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t)\cdot f(x) - tx}{\|(1-t)\cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$
       $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$
   Beweis:
   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t)\cdot f(x) - tx}{\|(1-t)\cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   Beweis:

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   Beweis:

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also: $H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften III

1. Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

   Beweis:

   - Gelte $f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$,
   - dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$
   - Setze also:
     $H(x,t) := \frac{(1-t)\cdot f(x) - tx}{\|(1-t)\cdot f(x) - tx\|}$
   - Es gilt:
     - $H(x,0) = f(x)$
     - $H(x,1) = -x$

     $\Rightarrow f \simeq -id$

   Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.

   Beweis:

   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x,t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x,1) = f(x)$
     - $H(x,0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\mathrm{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.

   Beweis:

   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x, t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x, 1) = f(x)$
     - $H(x, 0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\mathrm{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.

   Beweis:

   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x, t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x, 1) = f(x)$
     - $H(x, 0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\text{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\overline{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
   Beweis:
   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x,t) := \overline{f}(tx)$
     - $H(x,1) = f(x)$
     - $H(x,0) = \overline{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \overline{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\text{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
   Beweis:
   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x,t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x,1) = f(x)$
     - $H(x,0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\text{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.

   Beweis:

   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x, t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x, 1) = f(x)$
     - $H(x, 0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\mathrm{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
   Beweis:
   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x,t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x,1) = f(x)$
     - $H(x,0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\text{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
   Beweis:
   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x, t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x, 1) = f(x)$
     - $H(x, 0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\text{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\overline{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.

   <u>Beweis:</u>

   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x, t) := \overline{f}(tx)$
     - $H(x, 1) = f(x)$
     - $H(x, 0) = \overline{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \overline{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\text{const.}) = 0$ $\square$

Eigenschaften IV

1. Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
   Beweis:
   - Existiere eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$,
   - sie liefert eine Homotopie:
   - $H(x, t) := \bar{f}(tx)$
     - $H(x, 1) = f(x)$
     - $H(x, 0) = \bar{f}(0)$

     $\Rightarrow f \simeq \bar{f}(0)$

   Also folgt: $\deg f = \deg(\mathrm{const.}) = 0$ $\square$

Gliederung

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

Beweis:

$\Rightarrow$:

- Sei $x \mapsto v(x)$ ein tangentiales Vektorfeld; also ein Vektorfeld, das jedem $x \in \mathbb{S}^n$ einen Vektor im Tangentialraum an x zuordnet.
- Fasse $v(x)$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, dann sind x und $v(x)$ orthogonal zueinander, also insbesondere linear unabhängig.
- OBdA sei $\|v(x)\| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ (sonst setze $v'(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, denn $v(x) \neq 0$ nach Voraussetzung).

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

Beweis:

$\Rightarrow$:

- Sei $x \mapsto v(x)$ ein tangentiales Vektorfeld; also ein Vektorfeld, das jedem $x \in \mathbb{S}^n$ einen Vektor im Tangentialraum an x zuordnet.
- Fasse $v(x)$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, dann sind x und $v(x)$ orthogonal zueinander, also insbesondere linear unabhängig.
- OBdA sei $\|v(x)\| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ (sonst setze $v'(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, denn $v(x) \neq 0$ nach Voraussetzung).

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

<u>Beweis:</u>

<u>$\Rightarrow$</u>:

- Sei $x \mapsto v(x)$ ein tangentiales Vektorfeld; also ein Vektorfeld, das jedem $x \in \mathbb{S}^n$ einen Vektor im Tangentialraum an x zuordnet.
- Fasse $v(x)$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, dann sind x und $v(x)$ orthogonal zueinander, also insbesondere linear unabhängig.
- OBdA sei $\|v(x)\| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ (sonst setze $v'(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, denn $v(x) \neq 0$ nach Voraussetzung).

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

Beweis:

$\Rightarrow$:

- Sei $x \mapsto v(x)$ ein tangentiales Vektorfeld; also ein Vektorfeld, das jedem $x \in \mathbb{S}^n$ einen Vektor im Tangentialraum an x zuordnet.
- Fasse $v(x)$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, dann sind x und $v(x)$ orthogonal zueinander, also insbesondere linear unabhängig.
- OBdA sei $\|v(x)\| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ (sonst setze $v'(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, denn $v(x) \neq 0$ nach Voraussetzung).

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

- Auf diese Weise setze für $t \in [0, \pi]$:
- $H(x, t) = \cos(t)x + \sin(t)v(x)$
- $H(x, 0) = x$
- $H(x, \pi) = -x$
- Es folgt: $-id \simeq id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, also ist n ungerade.

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

- Auf diese Weise setze für $t \in [0, \pi]$:
- $H(x, t) = \cos(t)x + \sin(t)v(x)$
- $H(x, 0) = x$
- $H(x, \pi) = -x$
- Es folgt: $-id \simeq id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, also ist n ungerade.

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

- Auf diese Weise setze für $t \in [0, \pi]$:
- $H(x, t) = \cos(t)x + \sin(t)v(x)$
- $H(x, 0) = x$
- $H(x, \pi) = -x$
- Es folgt: $-id \simeq id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, also ist n ungerade.

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

- Auf diese Weise setze für $t \in [0, \pi]$:
- $H(x, t) = \cos(t)x + \sin(t)v(x)$
- $H(x, 0) = x$
- $H(x, \pi) = -x$
- Es folgt: $-id \simeq id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, also ist n ungerade.

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

- Auf diese Weise setze für $t \in [0, \pi]$:
- $H(x, t) = \cos(t)x + \sin(t)v(x)$
- $H(x, 0) = x$
- $H(x, \pi) = -x$
- Es folgt: $-id \simeq id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, also ist n ungerade.

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

$\Leftarrow$:

- Für $n = 2k - 1$ setze:
- $v(x) := (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
- Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$
- und $v(x) \perp x \quad \forall x$.

$\square$

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

$\underline{\Leftarrow}$:

- Für $n = 2k - 1$ setze:
- $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
- Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$
- und $v(x) \perp x \quad \forall x$.

$\square$

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

$\Leftarrow$:

- Für $n = 2k - 1$ setze:
- $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
- Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$
- und $v(x) \perp x \quad \forall x.$

$\square$

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

$\Leftarrow$:

- Für $n = 2k - 1$ setze:
- $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
- Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$
- und $v(x) \perp x \quad \forall x$.

$\square$

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

$\underline{\Leftarrow}$:

- Für $n = 2k - 1$ setze:
- $v(x) := (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
- Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$
- und $v(x) \perp x \quad \forall x$.

Der Satz vom Igel

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.

$\underline{\Leftarrow}$:

- Für $n = 2k - 1$ setze:
- $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
- Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$
- und $v(x) \perp x \quad \forall x$.

$\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls:
$\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)

Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.
(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls:
$\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)

Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.
(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls:
$\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)
Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.
(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls:
$\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)
Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.
(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls:
$\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)
Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.
(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls:
$\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)
Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

<u>Beweis:</u>

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, d hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

<u>Beweis:</u>

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, d hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

<u>Beweis:</u>

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, d hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

Beweis:

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, $\quad d$ hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

Beweis:

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, $\quad d$ hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

Beweis:

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1, \quad d$ hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

Beweis:

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, $\quad d$ hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die Einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.

<u>Beweis:</u>

- Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
- Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, $\quad d$ hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
- Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$.
- Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Gliederung

Die Grundsituation

Setze:

- $B_0^d(0, m) := (-m, m)^d$
- $\bar{B}_0^d(0, m) := [-m, m]^d$
- $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.

Die Grundsituation

Setze:

- $B_0^d(0, m) := (-m, m)^d$
- $\bar{B}_0^d(0, m) := [-m, m]^d$
- $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$.

Die Grundsituation

Setze:

- $B_0^d(0, m) := (-m, m)^d$
- $\bar{B}_0^d(0, m) := [-m, m]^d$
- $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.

Die Grundsituation

Setze:

- $B_0^d(0, m) := (-m, m)^d$
- $\bar{B}_0^d(0, m) := [-m, m]^d$
- $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.

Die Grundsituation

Setze:

- $$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \mathbb{S}^{d-1} & \to & \mathbb{S}^{d-1} \\ & x & \mapsto & \frac{f(mx)}{\|f(mx)\|} \end{array}$$
- Da $mx \in \partial \bar{B}_0^d(0, m) \Leftrightarrow x \in \mathbb{S}^{d-1}$ und wir vorausgesetzt haben:
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, ist diese Setzung wohldefiniert.

Die Grundsituation

Setze:

- $$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \mathbb{S}^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{d-1} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(mx)}{\|f(mx)\|} \end{array}$$
- Da $mx \in \partial \bar{B}_0^d(0, m) \Leftrightarrow x \in \mathbb{S}^{d-1}$ und wir vorausgesetzt haben:
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, ist diese Setzung wohldefiniert.

Die Grundsituation

Setze:

- $$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \mathbb{S}^{d-1} & \to & \mathbb{S}^{d-1} \\ & x & \mapsto & \frac{f(mx)}{\|f(mx)\|} \end{array}$$
- Da $mx \in \partial \bar{B}_0^d(0, m) \Leftrightarrow x \in \mathbb{S}^{d-1}$ und wir vorausgesetzt haben:
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, ist diese Setzung wohldefiniert.

Die Grundsituation

Setze:

- $$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \mathbb{S}^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{d-1} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(mx)}{\|f(mx)\|} \end{array}$$
- Da $mx \in \partial\bar{B}_0^d(0,m) \Leftrightarrow x \in \mathbb{S}^{d-1}$ und wir vorausgesetzt haben:
- $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0,m)$, ist diese Setzung wohldefiniert.

Definition:

Der topologische Grad einer stetigen Abbildung
$f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ mit
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$ ist definiert als:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) := \deg(\bar{f})$

Definition:

Der topologische Grad einer stetigen Abbildung $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$ ist definiert als:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) := \deg(\bar{f})$

Definition:

Der topologische Grad einer stetigen Abbildung
$f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ mit
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$ ist definiert als:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) := \deg(\bar{f})$

Definition:

Der topologische Grad einer stetigen Abbildung
$f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ mit
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$ ist definiert als:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) := \deg(\bar{f})$

Grad $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir kommen nun zu dem Kern und der Motivation vieler interessanter Mathematik:
Nullstellen bzw. Fixpunkte von Abbildungen.

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.

Grad $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir kommen nun zu dem Kern und der Motivation vieler interessanter Mathematik:
Nullstellen bzw. Fixpunkte von Abbildungen.

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.

Grad $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir kommen nun zu dem Kern und der Motivation vieler interessanter Mathematik:
Nullstellen bzw. Fixpunkte von Abbildungen.

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.

Grad $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir kommen nun zu dem Kern und der Motivation vieler interessanter Mathematik:
Nullstellen bzw. Fixpunkte von Abbildungen.

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.

Grad $\leftrightarrow$ Nullstellen

Wir kommen nun zu dem Kern und der Motivation vieler interessanter Mathematik:
Nullstellen bzw. Fixpunkte von Abbildungen.

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.
Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, 1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(\bar{f}) = 0 \quad \square$

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.
Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, 1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(\bar{f}) = 0 \quad \square$

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, 1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(\bar{f}) = 0 \quad \square$

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0,m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.
Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$
  auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(\bar{f}) = 0$ $\square$

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0,m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.
Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(\bar{f}) = 0 \quad \square$

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und
$f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.
Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, 1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(\bar{f}) = 0$ □

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0, m)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0, 1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(\bar{f}) = 0 \qquad \square$

Grad $\neq 0 \Rightarrow$ Nullstelle

Satz:
Sei $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0,m)$.
Gilt $deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) \neq 0$,
so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0,m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.

Beweis:

- Annahme: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,1) = \mathbb{D}^d$
- Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen:
- Es folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(\bar{f}) = 0 \quad \square$

Robustheit von Grad(f)

Nachdem wir eine so starke Aussage erhalten haben:
$Grad(f) \neq 0 \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$,
ist es natürlich, noch wissen zu wollen, wie sehr störungsanfällig unsere Gradabbildung ist.

Antwort: Sie ist robust zu nennen; in Abhängigkeit davon, wie weit die Funktionswerte auf dem Rand minimal von Null entfernt sind.

Robustheit von Grad(f)

Nachdem wir eine so starke Aussage erhalten haben:
$Grad(f) \neq 0 \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$,
ist es natürlich, noch wissen zu wollen, wie sehr störungsanfällig unsere Gradabbildung ist.
Antwort: Sie ist robust zu nennen; in Abhängigkeit davon, wie weit die Funktionswerte auf dem Rand minimal von Null entfernt sind.

Homotopie unter Nebenbedingungen

Wir möchten einen Begriff der Homotopie für Abbildungen $f, g : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ finden, der mit der vorher definierten Abbildung $\bar{f}$ verträglich ist.

Wir schreiben:
$f : (X, A) \to (Y, B)$
für $A \subset X$ und $B \subset Y$, wenn gilt $f(A) \subset B$.

Homotopie unter Nebenbedingungen

Wir möchten einen Begriff der Homotopie für Abbildungen $f, g : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ finden, der mit der vorher definierten Abbildung $\bar{f}$ verträglich ist.

Wir schreiben:
$f : (X, A) \to (Y, B)$
für $A \subset X$ und $B \subset Y$, wenn gilt $f(A) \subset B$.

Homotopie unter Nebenbedingungen

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1], \partial\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
einzuschränken.

Da gilt:

- $\forall t \in [0, 1] : \quad h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$
- ist für alle $t \in [0, 1]$ die Abbildung $\bar{h}_t(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ definiert.
- Also folgt: $\deg(h_0, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(h_1, \bar{B}_0^d(0, m))$

Vermittelt also eine solche Homotopie zwischen f und g, gilt:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(g, \bar{B}_0^d(0, m))$

Homotopie unter Nebenbedingungen

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0,m) \times [0,1], \partial \bar{B}_0^d(0,m) \times [0,1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
einzuschränken.

Da gilt:

- $\forall t \in [0,1] : \quad h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$
- ist für alle $t \in [0,1]$ die Abbildung $\bar{h}_t(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ definiert.
- Also folgt: $\deg(h_0, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(h_1, \bar{B}_0^d(0,m))$

Vermittelt also eine solche Homotopie zwischen f und g, gilt:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(g, \bar{B}_0^d(0,m))$

Homotopie unter Nebenbedingungen

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1], \partial\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
einzuschränken.

Da gilt:

- $\forall t \in [0, 1] : \quad h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$
- ist für alle $t \in [0, 1]$ die Abbildung $\bar{h}_t(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ definiert.
- Also folgt: $\deg(h_0, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(h_1, \bar{B}_0^d(0, m))$

Vermittelt also eine solche Homotopie zwischen f und g, gilt:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(g, \bar{B}_0^d(0, m))$

Homotopie unter Nebenbedingungen

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1], \partial \bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
einzuschränken.

Da gilt:

- $\forall t \in [0, 1] : \quad h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$
- ist für alle $t \in [0, 1]$ die Abbildung $\bar{h}_t(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ definiert.
- Also folgt: $\deg(h_0, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(h_1, \bar{B}_0^d(0, m))$

Vermittelt also eine solche Homotopie zwischen f und g, gilt:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(g, \bar{B}_0^d(0, m))$

Homotopie unter Nebenbedingungen

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0,m) \times [0,1], \partial \bar{B}_0^d(0,m) \times [0,1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
einzuschränken.

Da gilt:

- $\forall t \in [0,1] : \quad h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$
- ist für alle $t \in [0,1]$ die Abbildung $\bar{h}_t(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ definiert.
- Also folgt: $\deg(h_0, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(h_1, \bar{B}_0^d(0,m))$

Vermittelt also eine solche Homotopie zwischen f und g, gilt:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(g, \bar{B}_0^d(0,m))$

Homotopie unter Nebenbedingungen

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1], \partial\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
einzuschränken.

Da gilt:

- $\forall t \in [0, 1] : \quad h_t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)$
- ist für alle $t \in [0, 1]$ die Abbildung $\bar{h}_t(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ definiert.
- Also folgt: $\deg(h_0, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(h_1, \bar{B}_0^d(0, m))$

Vermittelt also eine solche Homotopie zwischen f und g, gilt:
$\deg(f, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(g, \bar{B}_0^d(0, m))$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Satz:

Sei $f : (\bar{B}_0^d(0,m), \partial\bar{B}_0^d(0,m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ stetig.

Dann existiert ein $c > 0$ mit:

$\sup \|g(x) - f(x)\| < c$

$\Rightarrow$

- $g : (\bar{B}_0^d(0,m), \partial\bar{B}_0^d(0,m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
- und $\deg(g, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(f, \bar{B}_0^d(0,m))$.

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Satz:
Sei $f : (\bar{B}_0^d(0, m), \partial\bar{B}_0^d(0, m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ stetig.
Dann existiert ein $c > 0$ mit:
$\sup \|g(x) - f(x)\| < c$
$\Rightarrow$

- $g : (\bar{B}_0^d(0, m), \partial\bar{B}_0^d(0, m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
- und $\deg(g, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(f, \bar{B}_0^d(0, m))$.

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Satz:
Sei $f : (\bar{B}_0^d(0,m), \partial\bar{B}_0^d(0,m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ stetig.
Dann existiert ein $c > 0$ mit:
$\sup \|g(x) - f(x)\| < c$
$\Rightarrow$

- $g : (\bar{B}_0^d(0,m), \partial\bar{B}_0^d(0,m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
- und $\deg(g, \bar{B}_0^d(0,m)) = \deg(f, \bar{B}_0^d(0,m))$.

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Satz:
Sei $f : (\bar{B}_0^d(0, m), \partial\bar{B}_0^d(0, m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ stetig.
Dann existiert ein $c > 0$ mit:
$\sup \|g(x) - f(x)\| < c$
$\Rightarrow$

- $g : (\bar{B}_0^d(0, m), \partial\bar{B}_0^d(0, m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
- und $\deg(g, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(f, \bar{B}_0^d(0, m))$.

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0, m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x, t) - f(x)\| = \|-tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x, t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, so folgt:
    $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0, m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x, t) - f(x)\| = \|-tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x, t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, so folgt: $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0, m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x, t) - f(x)\| = \|-tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x, t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, so folgt: $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0,m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)\} =: c > 0$
- Für sup $\|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x,t) - f(x)\| = \|-tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x,t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, so folgt: $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. □

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0,m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \ | \ x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x,t) - f(x)\| = \|-tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x,t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, so folgt:
    $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0, m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x, t) - f(x)\| = \| - tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x, t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, so folgt:
    $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0, m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x, t) - f(x)\| = \| - tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x, t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, so folgt:
    $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0, m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$
- Für sup $\|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x, t) - f(x)\| = \| - tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x, t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0, m)$, so folgt:
    $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. □

Grad(f + Störung) = Grad(f)

Beweis:

- Da $\partial \bar{B}_0^d(0,m)$ kompakt ist, und $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, gilt:
  $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)\} =: c > 0$
- Für $\sup \|g(x) - f(x)\| < c$ betrachte:
- $h(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$
  - Es folgt:
    $\|h(x,t) - f(x)\| = \|-tf(x) + tg(x)\| = t\|f(x) - g(x)\| < c$
  - Würde gelten $h(x,t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, so folgt: $\|f(x)\| < c$
  - Dies widerspricht aber der Wahl von c. $\square$

Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

- Der von f induzierte Homomorphismus enthält verwertbare, nicht sehr störanfällige Informationen über f.
- Die Information hat sehr einfache Form - eine ganze Zahl - weil die Homotopiegruppen von Sphären sehr einfach sind ($H_k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \cdot \delta_{kn}$).
- Der Grad vieler Abbildungen lässt sich durch Homotopien und Kompositionen bestimmen, also ist der komplizierte Weg über die induzierte Abbildung nicht immer nötig.
- Aber:
  - Der Abbildungsgrad hat inhärent mit Selbstabbildungen einer Sphäre zu tun, lässt sich also insbesondere nicht ohne weiteres auf $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ übertragen, um z.B. Nullstellen(-gebilde) zu finden oder Startwerte „einzukreisen“.

Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

- Der von f induzierte Homomorphismus enthält verwertbare, nicht sehr störanfällige Informationen über f.
- Die Information hat sehr einfache Form - eine ganze Zahl - weil die Homotopiegruppen von Sphären sehr einfach sind ($H_k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \cdot \delta_{kn}$).
- Der Grad vieler Abbildungen lässt sich durch Homotopien und Kompositionen bestimmen, also ist der komplizierte Weg über die induzierte Abbildung nicht immer nötig.
- Aber:
  - Der Abbildungsgrad hat inhärent mit Selbstabbildungen einer Sphäre zu tun, lässt sich also insbesondere nicht ohne weiteres auf $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ übertragen, um z.B. Nullstellen(-gebilde) zu finden oder Startwerte „einzukreisen“.

Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

- Der von f induzierte Homomorphismus enthält verwertbare, nicht sehr störanfällige Informationen über f.
- Die Information hat sehr einfache Form - eine ganze Zahl - weil die Homotopiegruppen von Sphären sehr einfach sind ($H_k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \cdot \delta_{kn}$).
- Der Grad vieler Abbildungen lässt sich durch Homotopien und Kompositionen bestimmen, also ist der komplizierte Weg über die induzierte Abbildung nicht immer nötig.
- Aber:
  - Der Abbildungsgrad hat inhärent mit Selbstabbildungen einer Sphäre zu tun, lässt sich also insbesondere nicht ohne weiteres auf $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ übertragen, um z.B. Nullstellen(-gebilde) zu finden oder Startwerte „einzukreisen".

Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

- Der von f induzierte Homomorphismus enthält verwertbare, nicht sehr störanfällige Informationen über f.
- Die Information hat sehr einfache Form - eine ganze Zahl - weil die Homotopiegruppen von Sphären sehr einfach sind ($H_k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \cdot \delta_{kn}$).
- Der Grad vieler Abbildungen lässt sich durch Homotopien und Kompositionen bestimmen, also ist der komplizierte Weg über die induzierte Abbildung nicht immer nötig.
- Aber:
  - Der Abbildungsgrad hat inhärent mit Selbstabbildungen einer Sphäre zu tun, lässt sich also insbesondere nicht ohne weiteres auf $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ übertragen, um z.B. Nullstellen(-gebilde) zu finden oder Startwerte „einzukreisen“.

Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

- Der von f induzierte Homomorphismus enthält verwertbare, nicht sehr störanfällige Informationen über f.
- Die Information hat sehr einfache Form - eine ganze Zahl - weil die Homotopiegruppen von Sphären sehr einfach sind ($H_k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \cdot \delta_{kn}$).
- Der Grad vieler Abbildungen lässt sich durch Homotopien und Kompositionen bestimmen, also ist der komplizierte Weg über die induzierte Abbildung nicht immer nötig.
- Aber:
  - Der Abbildungsgrad hat inhärent mit Selbstabbildungen einer Sphäre zu tun, lässt sich also insbesondere nicht ohne weiteres auf $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ übertragen, um z.B. Nullstellen(-gebilde) zu finden oder Startwerte „einzukreisen“.