Inhaltsverzeichnis

1 Homologie

1.1 Die induzierte Abbildung

Setzen wir uns zunächst noch mal mit der induzierten Abbildung auseinander. Allerdings mehr mit ihren Eigenschaften als mit ihrer Konstruktion.

1.1.1 Der Kettenkomplex $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Wir haben für eine kubische Menge X den Kettenkomplex $\mathcal{C}(X)$ erhalten. Hierbei besteht $C_k(X)$ aus den k-Ketten in X, ist also die freie abelsche Gruppe, die von allen Elementarwürfeln in X erzeugt wird.

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Die Randabbildung ∂ erfüllt: $\partial^2 = 0$, also gilt $B_k := \operatorname{im}\partial_k \subset \ker\partial_{k-1} =: Z_k$.

1.1.2 Kettenabbildungen

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Kettenkomplexe mit Gruppen und Abbildungen $\mathcal{C} := \{C_k, \partial_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und
$\mathcal{C}' := \{C'_k, \partial'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow C'_{k+1} \xrightarrow{\partial'} C'_k \xrightarrow{\partial'} C'_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

Eine Kettenabbildung $\varphi := \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Familie von Homomorphismen $\varphi_k : C_k \to C'_k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_k \arrow[r, "\partial'"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Also für die gilt: $\quad \partial' \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \partial$
Oder kürzer: $\quad \partial\varphi = \varphi\partial$

Kettenabbildungen bilden Kerne in Kerne und Bilder in Bilder ab. Da sie aus einer Kette heraus abbildet, erhält sie natürlich insbesondere die Teilmengenbeziehung $B_k \subset Z_k$, also induziert eine Kettenabbildung einen Homomorphismus: $\varphi_* : H_k \to H'_k$, wobei $H_k = Z_k/B_k$ die k-te Homologiegruppe sei. Weiterhin sei $H_*(X)$ die Menge aller Homologiegruppen von X.

1.1.3 Der induzierte Homomorphismus f_*

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sie induziert eine Kettenabbildung $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}'(Y)$, also auch einen Homomorphismus $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

1.1.4 Eigenschaften von f_*

Unmittelbar erhalten wir die folgenden Eigenschaften:

- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(id)_* = id$

Also ist $\cdot_*$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie der topologischen Räume (auf denen sich sinnvoll Homologie definieren lässt) zu der Kategorie der Gruppen.
Weiterhin agiert $\cdot_*$ nur auf Homotopieklasse von Abbildungen:

- $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$

Insbesondere sind also Homotopieäquivalenzen und somit auch Homöomorphismen Isomorphismen auf der Menge der Homotopiegruppen - d.h. Isomorphismen $H_k(X) \cong H_k(Y)$ für jedes k.
Weiterhin ist ein einzelner Punkt natürlich eine kubische Menge, dessen Homologiegruppen sich schnell berechnen lassen als:

$$H_k(\{*\}) = \delta_{k0} \cdot \mathbb{Z}$$

Also folgt für $X \simeq \{*\}$ - also zusammenziehbares X:

$$H_k(X) = H_k(\{*\}) = \delta_{k0} \cdot \mathbb{Z}$$

Denn ein zusammenziehbares X ist per Definition homotopieäquivalent zu einem Punkt.

1.2 Homologie von Sphären

Um den Abbildungsgrad einführen zu können, führt kein Weg an Sphären vorbei. Beschäftigen wir uns also noch einmal mit deren Homologiegruppen.

Eine Rechenhilfe

Satz:
Sei X topologischer Raum, $A \subset X$ ein abgeschlossenes (nicht-leeres) Deformationsretrakt einer Umgebung von A in X, dann ist die Sequenz:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

exakt für ein geeignetes ∂ und $\tilde{H}_n(X)$ die Homologiegruppen aus dem augmentierten Kettenkomplex.
Auch ohne Konstruktion der Abbildung ∂, sondern über die Exaktheit der Sequenz erhalten wir die Homologiegruppen der Sphären.

1.2.1 $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$

Satz:

Für die Homologiegruppen der Sphären gilt:

$H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ (und $H_i(\mathbb{S}^n) = 0$ für $i \neq n$).

Beweis:

Betrachte als $(X, A) := (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, dann gilt $X/A = \mathbb{S}^n$.

- $\mathbb{D}^n$ ist zusammenziehbar für alle n, also gilt $H_k(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $\mathbb{S}^0$ besteht aus genau zwei Punkten, also zwei Zusammenhangskomponenten und somit gilt: $H_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ bzw. $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Betrachte die Sequenz:

$$0 \cong \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\iota_*} H_{i-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Sie ist ein Ausschnitt aus der o.g. langen exakten Sequenz, also exakt; somit gilt (für $n > 0$):

- $0 = \operatorname{im} \pi_* = \ker \partial$
- $\operatorname{im} \partial = \ker \iota_* = \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$

Wegen der ersten Gleichung ist ∂ injektiv, aus der zweiten folgt Surjektivität, also ist ∂ ein Isomorphismus von $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, Es folgt: $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, und damit per Induktion: $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, denn $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$. □

2 Abbildungsgrad

2.1 Definition und Eigenschaften

Motivation

Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ($n > 0$), induziert eine Abbildung $f_* : H_*(\mathbb{S}^n) \to H_*(\mathbb{S}^n)$. Da aber nur die n-te Homologiegruppe der n-Sphäre nicht-trivial ist, ist der einzig interessante Homomorphismus die Abbildung f_{*n}. Für $f_{*n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wähle einen Erzeuger e von $\mathbb{Z}$, dann gilt:

$$f_{*n}(e) = d \cdot e$$

Hätten wir $-e$ gewählt, so folgt:

$$f_{*n}(-e) = -f_{*n}(e) = -(d \cdot e) = d \cdot (-e)$$

Wir erhalten also in beiden Fällen dasselbe d.

2.1.1 Definition

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n > 0)$ eine stetige Abbildung und f_* der auf den Homologiegruppen induzierte Homomorphismus. Gilt für einen Erzeuger e von $H_n(\mathbb{S}^n)$:

$$f_{*n}(e) = d \cdot e$$

so setze: $\deg f := d$. Wir nennen $\deg f$ den Abbildungsgrad von f.

2.1.2 Eigenschaften

Es gilt $\deg id = 1$, denn die Identität induziert die Identität auf den Homologiegruppen, also gilt $id_*(e) = 1 \cdot e$.
Homotope Abbildungen haben den gleichen Grad, denn sie induzieren die gleiche Abbildung auf den Homologiegruppen, insbesondere gilt: Ist f nicht surjektiv, so hat f Grad Null. Ist nämlich f nicht surjektiv, so existiert ein $x_0 \notin \operatorname{im} f$, also gilt $\operatorname{im} f \subset \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \simeq \{*\}$. Also ist f homotop zu einer konstanten Abbildung auf $\mathbb{S}^n$.
Der Grad von Abbildungen ist multiplikativ, denn $\cdot_*$ ist ein kovarianter Funktor, also folgt aus $(fg)_* = f_* g_*$ die Gleichung $\deg fg = \deg f \deg g$.
Ist f Homotopieäquivalenz, so gibt es eine Abbildung g mit $fg \simeq id$, es folgt also:
$\deg f \deg g = 1$, also $\deg f = \pm 1$. Insbesondere haben Homöomorphismen Grad ± 1.

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig fortsetzbar zu $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so folgt $\deg f = 0$.
Beweis:
Existiert eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so liefert sie eine Homotopie:
$H(x,t) := \bar{f}(tx)$.
Es gilt $H(x,1) = f(x)$ und $H(x,0) = \bar{f}(0)$, also folgt $f \simeq \bar{f}(0)$ Also liefert die stetige Fortsetzung eine Homotopie zur konstanten Abbildung, folglich hat f Grad Null. $\square$

2.1.3 Grad(Spiegelung) $= -1$

Ist $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine Spiegelung am Äquator $\mathbb{S}^{n-1}$, so folgt $\deg f = -1$.
Beweisskizze (über Simplex-Homologie):

- $\mathbb{S}^n$ trägt eine Δ-Komplex-Struktur, wobei die obere Hemisphäre der n-Simplex Δ_1^n und die untere der n-Simplex Δ_2^n sei.
- Die n-Kette $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ ist dann Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (wegen Exaktheit einer Simplex-Homologie-Sequenz).
- Die induzierte Abbildung $f_\#$ vertauscht Δ_1^n und Δ_2^n, also gilt:
- $f_\#(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$
- Also gilt $\deg f = -1$.

Korollar

Für $-id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gilt: $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$, denn $-id$ ist Komposition von $n+1$ Spiegelungen.

Fixpunktfreie Abbildungen

Sei $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei, so folgt $\deg f = (-1)^{n+1}$
Beweis:
Gelte $f(x) \neq x \ \ \forall x \in \mathbb{S}^n$, dann gilt $(1-t) \cdot f(x) - tx \neq 0 \ \ \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{S}^n$, denn die Gerade von $f(x)$ nach $-x$ geht nicht durch den Ursprung. Setze also:

$$H(x,t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - tx}{\|(1-t) \cdot f(x) - tx\|}$$

Es gilt:

- $H(x,0) = f(x)$
- $H(x,1) = -x$
  $\Rightarrow f \simeq -id$

Also folgt: $\deg f = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$ $\square$

2.2 Der Satz vom Igel für $\mathbb{S}^n$

Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ hat ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen genau dann, wenn n ungerade ist.
Beweis:
$\Rightarrow$:

- Sei $x \mapsto v(x)$ ein tangentiales Vektorfeld; also ein Vektorfeld, das jedem $x \in \mathbb{S}^n$ einen Vektor im Tangentialraum an x zuordnet.
- Fasse $v(x)$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, dann sind x und $v(x)$ orthogonal zueinander, also insbesondere linear unabhängig.
- OBdA sei $\|v(x)\| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ (sonst setze $v'(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, denn $v(x) \neq 0$ nach Voraussetzung).

Auf diese Weise setze für $t \in [0, \pi]$:

$$H(x,t) = \cos(t)x + \sin(t)v(x)$$

- $H(x,0) = x$
- $H(x,\pi) = -x$

Es folgt: $-id \simeq id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, also ist n ungerade.

$\Leftarrow$: Für $n = 2k-1$ setze: $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$
Es gilt: $\|v(x)\| = \|x\| = 1 \neq 0$ und $v(x) \perp x \quad \forall x$. □

2.3 Freie Wirkungen auf $\mathbb{S}^{2n}$

Die einzige nicht-triviale Gruppe G, die stetig und frei auf $\mathbb{S}^{2n}$ wirken kann, ist $\mathbb{Z}_2$.
(Eine Gruppenwirkung heißt frei, falls: $\exists x \in X : g.x = x \Rightarrow g = e$.)
Beweis:

- (Bem.: Da $\mathbb{S}^{2n}$ kompakt und hausdorffsch ist, entsprechen die $g \in G$ schon durch Stetigkeit und Bijektivität Homöomorphismen.)
- Da der Grad von Homöomorphismen ± 1 sein muss, erhalten wir einen Homomorphismus:
- $d : G \to \{\pm 1\}$ mit $d(g) := \deg(g.)$

Die Wirkung ist nach Voraussetzung frei, also ist jeder der Homöomorphismen vom Grad $(-1)^{2n+1}$.
Also gilt für $g \neq e$: $d(g) = (-1)^{2n+1} = -1$, d hat also trivialen Kern, ist also injektiv.
Es gilt somit $|G| \leq |\{\pm 1\}| = 2$. Die einzige Gruppe der Ordnung 2 ist aber $\mathbb{Z}_2$. □

2.4 Anwendungen

2.4.1 Die Grundsituation

Setze: Es sei $B_0^d(0,m) := (-m,m)^d$, also die offene Kugel mit Radius m um den Ursprung bezüglich der Maximumsnorm. Weiterhin sei $\bar{B}_0^d(0,m) := [m,m]^d$ die abgeschlossene Kugel um Null bzgl. der Maximumsnorm.
Es sei f eine stetige Abbildung von $B_0^d(0,m)$ nach $\mathbb{R}^d$, wobei f auf dem Rand der Kugel keine Nullstellen habe. Diese können wir durch topologische Methoden nicht aufspüren, da sie offensichtlich sehr störungsanfällig sind, wenn es keine offene Menge in $B_0^d(0,m)$ um die Nullstelle gibt.
Wir setzen

$$\begin{array}{cccc} \bar{f}: & \mathbb{S}^{d-1} & \to & \mathbb{S}^{d-1} \\ & x & \mapsto & \frac{f(mx)}{\|f(mx)\|} \end{array}$$

Es liegt mx genau dann auf dem Rand von $B_0^d(0,m)$, welcher nullstellenfrei ist, wenn $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ liegt. Also ist diese Abbildung wohldefiniert, denn die Norm wird nie Null.

2.4.2 Definition

Der <u>topologische Grad</u> einer stetigen Abbildung $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0,m)$ ist definiert als:

$$\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) := \deg(\bar{f})$$

2.4.3 Grad ↔ Nullstellen

Wir kommen nun zu dem Kern und der Motivation vieler interessanter Mathematik: Nullstellen bzw. Fixpunkte von Abbildungen.

<u>Satz:</u>
Sei $f : \bar{B}_0^d(0,m) \to \mathbb{R}^d$ stetig und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\bar{B}_0^d(0,m)$.
Gilt $\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) \neq 0$, so existiert ein $x \in \bar{B}_0^d(0,m)$ mit $\underline{f(x) = 0}$.
<u>Beweis:</u>

- Annahme: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,m)$
  $\Leftrightarrow f(mx) \neq 0 \qquad \forall x \in \bar{B}_0^d(0,1) = \mathbb{D}^d$

Wir können also $\bar{f}$ stetig von $\mathbb{S}^{d-1}$ auf $\mathbb{D}^d$ fortsetzen: Also folgt: $\deg(f, \bar{B}_0^d(0,m)) = deg(\bar{f}) = 0$
□

2.4.4 Robustheit von Grad(f)

Es wäre natürlich schön, wenn diese Aussage unabhängig von kleinen Störungen wäre. Tatsächlich ist der Abbildungsgrad ziemlich robust gegenüber Störung, das ist allerdings abhängig davon, wie weit die Funktionswerte auf dem Rand minimal von Null entfernt sind. Was nicht überrascht, denn je näher die Funktionswerte an Null liegen, desto mehr Abbildungen, für die wir $\bar{f}$ nicht definieren können, liegen in der Nähe.

2.4.5 Homotopie unter Nebenbedingungen

Wir möchten einen ähnlichem Homotopiebegriff für Abbildungen $f, g : \bar{B}_0^d(0, m) \to \mathbb{R}^d$ finden wie wir ihn auf $\mathbb{S}^n$ haben, um die Homotopien mit $\bar{f}$ verträglich zu halten. Wir schreiben:

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

für $A \subset X$ und $B \subset Y$, wenn gilt $f(A) \subset B$.

Mit dieser Notation ist es sinnvoll, sich auf Homotopien:
$h : (\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1], \partial\bar{B}_0^d(0, m) \times [0, 1]) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ einzuschränken. Also Homotopien von Abbildungen $\bar{B}_0^d(0, m)$, die sich ineinander überführen lassen, ohne Zwischenstufen, die Nullstellen auf dem Rand haben. Da mit unserer Einschränkung $h_t(x) := h(x, t) \neq 0$ für alle x auf dem Rand und für alle t, lässt sich für jedes t die Abbildung $\bar{h_t}(x) = \frac{h_t(mx)}{\|h_t(mx)\|}$ betrachten. Also vermittelt eine solche Homotopie eine Homotopie der Abbildungen $\bar{f}$ und $\bar{g}$, also haben Abbildungen, die sich durch eine Homotopie ohne Nullstellen auf dem Rand verbinden lassen, gleichen Abbildungsgrad.

2.4.6 Grad(f + Störung) = Grad(f)

Wir kommen nun dazu, wie anfällig der Abbildungsgrad auf Störungen reagiert:

Satz:
Sei $f : (\bar{B}_0^d(0, m), \partial\bar{B}_0^d(0, m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$ stetig.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit:
$\sup_{x \in \bar{B}_0^d(0,m)} \|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow$

- $g : (\bar{B}_0^d(0, m), \partial\bar{B}_0^d(0, m)) \to (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus 0)$
- und $\deg(g, \bar{B}_0^d(0, m)) = \deg(f, \bar{B}_0^d(0, m))$.

In Worten: Es gibt um jede Abbildung, die keine Nullstellen auf dem Rand hat, eine Epsilon-Umgebung, in der alle Abbildungen ebenfalls keine Nullstellen auf dem Rand und den gleichen Grad wie f haben.
Beweis:
Da der Rand von $B_0^d(0, m)$ kompakt und f nach Voraussetzung dort ungleich Null ist, ist das Infimum über die Norm der Funktionswerte ebenfalls echt größer als Null. Es gilt:

$$\inf\{\|f(x)\| \mid x \in \partial\bar{B}_0^d(0, m)\} =: c > 0$$

Sei g eine Abbildung mit einem maximalen Abstand von f, der echt kleiner ist als dieses c. Für $\sup \|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon < c$ betrachte:

$$h(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

- Es folgt:
  $\|h(x,t) - f(x)\| = \| - tf(x) + tg(x)\| \leq t\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$

Würde gelten $h(x,t) = 0$ für ein $x \in \partial \bar{B}_0^d(0,m)$, so folgt:
$\|f(x)\| \leq \varepsilon$ Dies widerspricht aber der Wahl von ε. Also ist die Homotopie für kein t auf dem Rand mit Nullstelle, also ist es auch g nicht, und nach unserer vorherigen Betrachtung hat g den gleichen Grad wie f. $\square$

3 Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

- Der von f induzierte Homomorphismus enthält verwertbare, nicht sehr störanfällige Informationen über f.

- Die Information hat sehr einfache Form - eine ganze Zahl - weil die Homotopiegruppen von Sphären sehr einfach sind ($H_k(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \cdot \delta_{kn}$).

- Der Grad vieler Abbildungen lässt sich durch Homotopien und Kompositionen bestimmen, also ist der komplizierte Weg über die induzierte Abbildung nicht immer nötig.

- Aber:

  - Der Abbildungsgrad hat inhärent mit Selbstabbildungen einer Sphäre zu tun, lässt sich also insbesondere nicht ohne weiteres auf $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ übertragen, um z.B. Nullstellen(-gebilde) zu finden oder Startwerte „einzukreisen“.