

# Bildererkennung und Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Jeremias Lauterbach

# Das Problem: Visualisierung dreidimensionaler Objekte



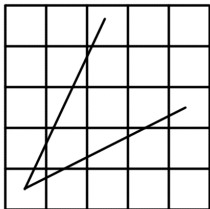
**Abbildung:** Ein MRT-Schnitt des menschlichen Gehirns

Quelle: <http://www.wikipedia.de>: Magnetic Resonance Imaging scan of a head. Released under the GFDL by en:User:TheBrain on 20 May 2003

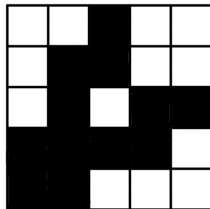
# Die Lösung: Homologie

Wir können die Homologie dreidimensionaler Objekte berechnen ohne sie graphisch darzustellen, damit erhalten wir topologische Information über das Objekt, ohne dass eine Visualisierung nötig ist.

# Ein zweidimensionales Beispiel



(a) Die Geradenabschnitte  $V$



(b) Die kubische Approximation

Abbildung:  $V$  in einer Auflösung von  $5 \times 5$  Pixeln

# Ein zweidimensionales Beispiel

Wir bezeichnen mit  $\Gamma$  die Menge der schwarzen Pixel, mit  $\Lambda$  die Menge der weißen Pixel und erhalten kubische Mengen  $G$ ,  $L$  durch

$$G = |\Gamma| = \bigcup \Gamma, \quad L = |\Lambda| = \bigcup \Lambda$$

# Ein zweidimensionales Beispiel

Wir bezeichnen mit  $\Gamma$  die Menge der schwarzen Pixel, mit  $\Lambda$  die Menge der weißen Pixel und erhalten kubische Mengen  $G$ ,  $L$  durch

$$G = |\Gamma| = \bigcup \Gamma, \quad L = |\Lambda| = \bigcup \Lambda$$

Während  $\Gamma$  und  $\Lambda$  disjunkte Mengen sind, haben  $G$  und  $L$  gemeinsame Ecken und Kanten. Dies lässt sich nicht vermeiden, da die Information über ein- und nulldimensionale Seiten nicht in den Pixeln enthalten sind.

# Ein zweidimensionales Beispiel

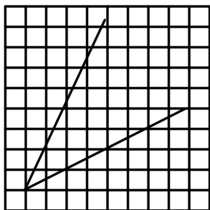
Wir bezeichnen mit  $\Gamma$  die Menge der schwarzen Pixel, mit  $\Lambda$  die Menge der weißen Pixel und erhalten kubische Mengen  $G$ ,  $L$  durch

$$G = |\Gamma| = \bigcup \Gamma, \quad L = |\Lambda| = \bigcup \Lambda$$

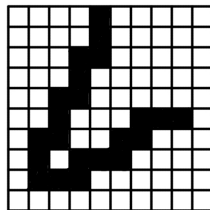
Während  $\Gamma$  und  $\Lambda$  disjunkte Mengen sind, haben  $G$  und  $L$  gemeinsame Ecken und Kanten. Dies lässt sich nicht vermeiden, da die Information über ein- und nulldimensionale Seiten nicht in den Pixeln enthalten sind.

$V$  ist homotop zu einem Punkt, hat also die gleiche Homologie.  $G$ , eine kubische Approximation von  $V$ , besitzt ein Loch, lässt sich also nicht zu einem Punkt zusammenziehen.

# Ein zweidimensionales Beispiel



(a) Die Geradenabschnitte  $V$



(b) Die kubische Approximation

Abbildung:  $V$  in einer Auflösung von  $10 \times 10$  Pixeln

# Homologie in der Bilderkennung

Die Berechnung der Homologie dreidimensionaler Objekte kann in Anwendungen geometrische Fragen mit sehr wenig Aufwand beantworten.

# Homologie in der Bilderkennung

Die Berechnung der Homologie dreidimensionaler Objekte kann in Anwendungen geometrische Fragen mit sehr wenig Aufwand beantworten.

Die betrachteten Objekte sind stetig, berechnet wird die Homologie einer kubischen Approximation. Dadurch können sowohl zusätzliche Erzeuger der Homologiegruppen entstehen, als auch Erzeuger vernichtet werden.

# Homologie in der Bilderkennung

Es stellen sich folgende Fragen:

- Wie sehen die Homologiegruppen der kubischen Homologie im dreidimensionalen aus?

# Homologie in der Bilderkennung

Es stellen sich folgende Fragen:

- Wie sehen die Homologiegruppen der kubischen Homologie im dreidimensionalen aus?
- Welche geometrischen Eigenschaften messen sie?

# Homologie in der Bilderkennung

- Die einzigen Homologiegruppen die auftreten sind  $H_0$ ,  $H_1$  und  $H_2$  bzw. bei zweidimensionalen Objekten nur  $H_0$  und  $H_1$ . Die hier auftretenden Homologiegruppen sind endlich erzeugte freie abelsche Gruppen sind, d.h. es gilt  $H_k \cong \mathbb{Z}^{\beta_k}$ ,  $\beta_k \in \mathbb{Z}$ . Die Zahl  $\beta_k$  heißt die  $k$ -te Bettizahl.

# Homologie in der Bilderkennung

- Die einzigen Homologiegruppen die auftreten sind  $H_0$ ,  $H_1$  und  $H_2$  bzw. bei zweidimensionalen Objekten nur  $H_0$  und  $H_1$ .  
Die hier auftretenden Homologiegruppen sind endlich erzeugte freie abelsche Gruppen sind, d.h. es gilt  $H_k \cong \mathbb{Z}^{\beta_k}$ ,  $\beta_k \in \mathbb{Z}$ .  
Die Zahl  $\beta_k$  heißt die  $k$ -te Bettizahl.
- Die Homologiegruppen sind durch die Bettizahlen  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$  charakterisiert. Geometrisch misst  $\beta_0$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des betrachteten kubischen Komplexes,  $\beta_1$  die Anzahl der Tunnel (im zweidimensionalen werden daraus Löcher) und  $\beta_2$  die Anzahl der eingeschlossenen Löcher.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Kühlt sich ein nahezu homogenes Gemische aus Eisenatomen und Chromatomen ab, so setzt ein Prozess der Phasentrennung ein, das Material bildet Regionen, die fast ausschließlich aus Eisen- bzw. Chromatomen bestehen. Diese Regionen sind dreidimensionale Strukturen, deren Aussehen von  $t$  abhängt.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Kühlt sich ein nahezu homogenes Gemische aus Eisenatomen und Chromatomen ab, so setzt ein Prozess der Phasentrennung ein, das Material bildet Regionen, die fast ausschließlich aus Eisen- bzw. Chromatomen bestehen. Diese Regionen sind dreidimensionale Strukturen, deren Aussehen von  $t$  abhängt.

Es ist möglich das Gemisch auf atomaren Level zu vermessen, d.h. das Aussehen der Regionen kann experimentell bestimmt werden.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

## Die Cahn-Hilliard Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\Delta(\epsilon^2 \Delta u + u - u^3), & x \in \Omega \\ n \cdot \nabla u &= n \cdot \nabla \Delta u = 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$n$  ist der nach außen gerichtete Normalenvektor an  $\partial\Omega$ .  $u$  beschreibt die relative Konzentration der beiden Metalle.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

## Die Cahn-Hilliard Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\Delta(\epsilon^2 \Delta u + u - u^3), & x \in \Omega \\ n \cdot \nabla u &= n \cdot \nabla \Delta u = 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$n$  ist der nach außen gerichtete Normalenvektor an  $\partial\Omega$ .  $u$  beschreibt die relative Konzentration der beiden Metalle.

Für kleine  $\epsilon > 0$  entstehen interessante Muster, diese Fälle werden wir näher betrachten.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Mit einer kleinen zufälligen Anfangsbedingung  $u_0(x, y, z)$ , die

$$\int \int \int_{\Omega} u_0(x, y, z) dx dy dz = 0$$

erfüllt, kann man die Gleichung numerisch lösen.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Mit einer kleinen zufälligen Anfangsbedingung  $u_0(x, y, z)$ , die

$$\int \int \int_{\Omega} u_0(x, y, z) dx dy dz = 0$$

erfüllt, kann man die Gleichung numerisch lösen.

Z.B. kann eine Lösung auf einem Gitter aus  $128 \times 128 \times 128$  Punkten gerechnet werden. Die vorhandene Datenmenge besteht dann für festes  $\tau > 0$  aus Zahlen  $\{u(i, j, k, \tau) \mid 1 \leq i, j, k \leq 128\}$ , die  $u(x, y, z, \tau)$  approximieren.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Da wir uns für Regionen interessieren in denen die Phasentrennung fast komplett stattgefunden hat, betrachten wir für ein kleines  $\delta > 0$

$$\begin{aligned}R_1(t) &= \{x \in \Omega | u(x, t) > 1 - \delta\} \\ R_2(t) &= \{x \in \Omega | u(x, t) < -1 + \delta\}\end{aligned}$$

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Da wir uns für Regionen interessieren in denen die Phasentrennung fast komplett stattgefunden hat, betrachten wir für ein kleines  $\delta > 0$

$$\begin{aligned}R_1(t) &= \{x \in \Omega | u(x, t) > 1 - \delta\} \\ R_2(t) &= \{x \in \Omega | u(x, t) < -1 + \delta\}\end{aligned}$$

Wir wollen wissen, ob eine Ähnlichkeit der Topologie der Regionen  $R_1(t)$  bzw.  $R_2(t)$  mit der Topologie der Regionen in denen vorwiegend Eisen bzw. Chrom vorhanden ist besteht.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

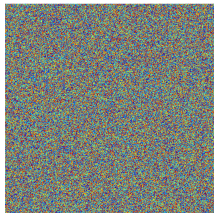
## Im Zweidimensionalen

Wir gehen nun über zu dem zweidimensionalen Fall und betrachten  $\Omega = [0, 1]^2$ . Die Bilder aus der nächsten Abbildung wurden mit Matlab für  $\epsilon = 0.005$  auf einem  $512 \times 512$  Gitter und einer Zufallsanfangsbedingung  $u(x_1, x_2, 0)$ , die

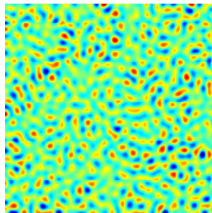
$$\int_0^1 \int_0^1 u(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = 0$$

erfüllt, berechnet.

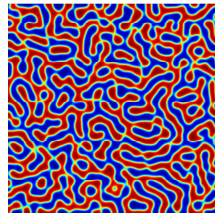
# Cahn-Hilliard: Niveaulinien von $u(x_1, x_2, t)$



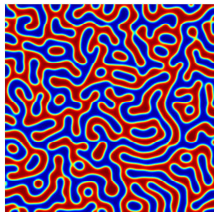
(a)  $t = 0$



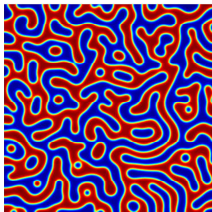
(b)  $t = 0.002$



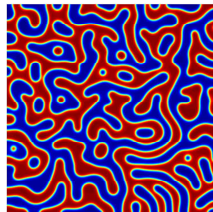
(c)  $t = 0.004$



(d)  $t = 0.006$



(e)  $t = 0.008$



(f)  $t = 0.01$

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Wir definieren

$$\begin{aligned}U^+(t) &= \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid u(x_1, x_2) > 0\} \\U^-(t) &= \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid u(x_1, x_2) < 0\}\end{aligned}$$

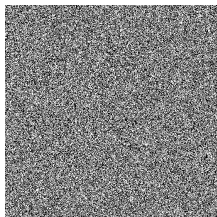
# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Wir definieren

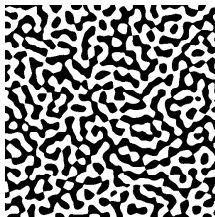
$$\begin{aligned} U^+(t) &= \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid u(x_1, x_2) > 0\} \\ U^-(t) &= \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid u(x_1, x_2) < 0\} \end{aligned}$$

Wir wollen die Homologie von  $U^+(t)$  und  $U^-(t)$  berechnen, dazu benötigen wir kubische Mengen. Da wir sowieso nur die Daten  $\{u(i, j, t) \mid 1 \leq i, j \leq 512\}$  zur Verfügung haben ist die Zuordnung klar,  $u(i, j, t)$  gehört zu  $K_2(U^+(t))$  wenn  $u(i, j, t) > 0$  und zu  $K_2(U^-(t))$  wenn  $u(i, j, t) < 0$ .

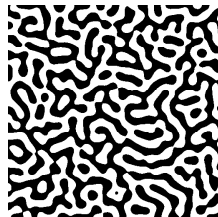
# Cahn-Hilliard: Die Mengen $K_2(U^+(t))$



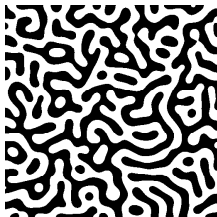
(a)  $t = 0$



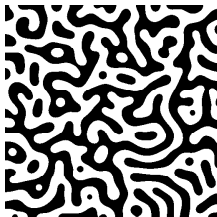
(b)  $t = 0.002$



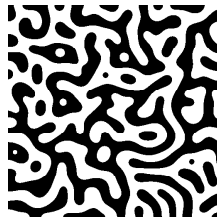
(c)  $t = 0.004$



(d)  $t = 0.006$

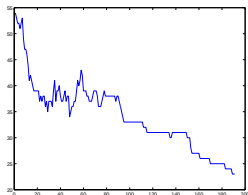


(e)  $t = 0.008$

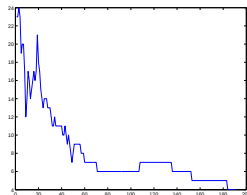


(f)  $t = 0.01$

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung



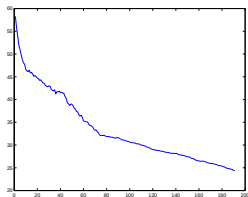
(a) Die Bettizahlen  $\beta_0$



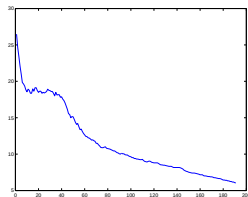
(b) Die Bettizahlen  $\beta_1$

**Abbildung:** Die Bettizahlen der Muster zur Zeit  $0.0005 < t \leq 0.01$

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung



(a) Die Bettizahlen  $\beta_0$



(b) Die Bettizahlen  $\beta_1$

**Abbildung:** Die gemittelten Bettizahlen der Muster zur Zeit  
 $0.0005 < t \leq 0.01$

# Beobachtungen und Bemerkungen

- Der Wert von  $\dim H_k(U^\pm(t))$  ist für kleine Zeiten  $t$  sehr groß, da die Anfangsbedingung zufällig ist und zahlreiche Vorzeichenwechsel auftreten, und deswegen nicht in den Bildern enthalten.
- Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und Löcher nimmt innerhalb der ersten Zeitschritte rapide ab.
- Nachdem alle kleinen topologischen Strukturen verschwunden sind, beginnt eine Phase, in der die Komplexität der Topologie annähernd gleich bleibt.
- Nach 50 Zeitschritten nimmt die topologische Komplexität sehr schnell ab.
- Die Geschwindigkeit der Abnahme der topologischen Komplexität wird danach sehr schnell kleiner.

# Zusammenhangskomponenten: Am Rand oder im Inneren?

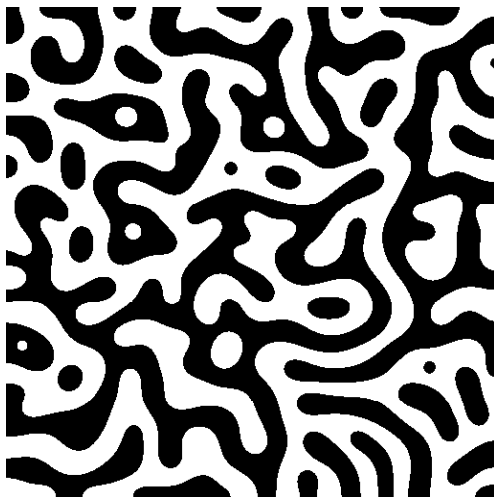


Abbildung:  $K_2(U^+(0.1))$

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Von den 36 Zusammenhangskomponenten berühren 23 den Rand und nur 13 Zusammenhangskomponenten liegen komplett im Inneren. Die Bettizahl  $\beta_0$  von  $U^+(t)$  unterscheidet nicht zwischen diesen beiden Typen von Zusammenhangskomponenten.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Von den 36 Zusammenhangskomponenten berühren 23 den Rand und nur 13 Zusammenhangskomponenten liegen komplett im Inneren. Die Bettizzahl  $\beta_0$  von  $U^+(t)$  unterscheidet nicht zwischen diesen beiden Typen von Zusammenhangskomponenten.

Nur die inneren Komponenten sind diejenigen, die Löcher in  $U^-(t)$  verursachen. Bezeichnen wir mit  $\beta_{int,0}(U^+(t))$  die Anzahl der inneren und mit  $\beta_{rand,0}(U^+(t))$  die Anzahl der Randkomponenten von  $U^+(t)$ , so erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}\beta_{int,0}(U^+(t)) &= \beta_1(U^-(t)) \quad \text{und} \\ \beta_{rand,0}(U^+(t)) &= \beta_0(U^+(t)) - \beta_1(U^-(t)).\end{aligned}$$

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

Analog zu dem Vorgehen von oben stellt sich die Frage, wie sich diese beiden Zahlen sich in Abhängigkeit von  $t$  verhalten. Es zeigt sich, dass während die Anzahl der inneren Komponenten ein ähnliches Verhalten wie  $\beta_0$  zeigt, die Anzahl der Randkomponenten im beobachteten Zeitraum nahezu konstant bleibt.

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

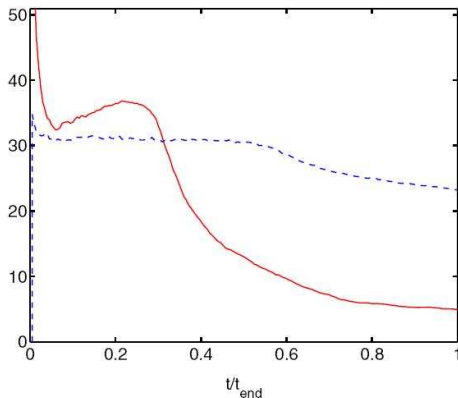


Abbildung: Die zeitliche Entwicklung von  $\beta_{int,0}$  (rot) und  $\beta_{rand,0}$  (blau)

# Muster aus der Cahn-Hilliard Gleichung

## Fazit

Im Gegensatz zu der Kenntniss anderer (u.U. leichter berechenbarer) topologischer Invarianten, wie z.B. der Euler-Charakteristik, ermöglicht die Kenntniss der Bettizahlen für  $U^\pm(t)$  zusätzlich zu der Untersuchung der Zusammenhangskomponenten und der Löcher sogar die Untersuchung von auftretenden Randeffekten in endlichen Systemen.

# Muster und dynamische Systeme

Nichtlineare Systeme können zeitabhängige Muster erzeugen. Dabei ist es nicht selbstverständlich, dass diese Muster sich immer weiter vereinfachen, wie im Fall der Cahn-Hilliard Gleichung.

# Muster und dynamische Systeme

Nichtlineare Systeme können zeitabhängige Muster erzeugen. Dabei ist es nicht selbstverständlich, dass diese Muster sich immer weiter vereinfachen, wie im Fall der Cahn-Hilliard Gleichung.

Wir versuche mit Hilfe von Homologie aus der zeitlichen Entwicklung der Muster Rückschlüsse über das der Dynamik zugrunde liegende System zu ziehen.

# Muster und dynamische Systeme

Zunächst wollen wir nicht nur jedes Muster einzeln für sich betrachten sondern interessieren uns für die zeitliche Entwicklung bis zu einem festen Zeitpunkt  $\tau$ . Wir benennen die für uns interessante Teilmenge aus  $\Omega \times [0, \tau]$   $E$ . In der Notation von oben:

$$E = \bigcup_{t \in [0, \tau]} U^+(t).$$

# Muster und dynamische Systeme

Zunächst wollen wir nicht nur jedes Muster einzeln für sich betrachten sondern interessieren uns für die zeitliche Entwicklung bis zu einem festen Zeitpunkt  $\tau$ . Wir benennen die für uns interessante Teilmenge aus  $\Omega \times [0, \tau]$   $E$ . In der Notation von oben:

$$E = \bigcup_{t \in [0, \tau]} U^+(t).$$

Wir versuchen die räumlichen Strukturen der Muster und deren zeitliche Änderung zu verstehen. Wir könnten (wie oben) die Bettizahlen jedes Musters berechnen und deren zeitlichen Verlauf betrachten. Allerdings geht dabei die Information über Interaktionen zwischen den Mustern zu verschiedenen Zeiten verloren.

# Muster und dynamische Systeme

Wir berechnen die Topologie von  $E$ . Wenn das ursprüngliche System chaotisch ist erwarten wir auch von den Mustern eine Rekurrenz und deswegen reicht es dann auch aus endlich lange Zeitblöcke zu betrachten.

# Muster und dynamische Systeme

Wir berechnen die Topologie von  $E$ . Wenn das ursprüngliche System chaotisch ist erwarten wir auch von den Mustern eine Rekurrenz und deswegen reicht es dann auch aus endlich lange Zeitblöcke zu betrachten.

Es ist möglich aus der dadurch erhaltenen Zeitreihe eine Approximation für den maximalen Lyapunovexponenten des zugrunde liegenden Systems zu erhalten. Dadurch werden Aussagen darüber, ob ein System chaotisch ist, möglich.

# Muster und dynamische Systeme

Wir berechnen die Topologie von  $E$ . Wenn das ursprüngliche System chaotisch ist erwarten wir auch von den Mustern eine Rekurrenz und deswegen reicht es dann auch aus endlich lange Zeitblöcke zu betrachten.

Es ist möglich aus der dadurch erhaltenen Zeitreihe eine Approximation für den maximalen Lyapunovexponenten des zugrunde liegenden Systems zu erhalten. Dadurch werden Aussagen darüber, ob ein System chaotisch ist, möglich.

Auch wenn die Dimension der betrachteten Objekte damit um eine erhöht wird, so ist das Verfahren trotzdem durchführbar.