Komplizierte Dynamik und der Conley-Index

von Enrico Dahl

Gliederung

Gliederung

- Algorithmus zur Konstruktion einer kombinatorischen Einschließung für eine stetige Abbildung

Gliederung

- Algorithmus zur Konstruktion einer kombinatorischen Einschließung für eine stetige Abbildung

- Algorithmus zur Bestimmung der kombinatorischen invarianten Menge der kombinatorischen Einschließung

Gliederung

- Algorithmus zur Konstruktion einer kombinatorischen Einschließung für eine stetige Abbildung

- Algorithmus zur Bestimmung der kombinatorischen invarianten Menge der kombinatorischen Einschließung

- Algorithmus zur Konstruktion eines Index-Paares für die stetige Abbildung

Gliederung

– Algorithmus zur Konstruktion einer kombinatorischen Einschließung für eine stetige Abbildung

– Algorithmus zur Bestimmung der kombinatorischen invarianten Menge der kombinatorischen Einschließung

– Algorithmus zur Konstruktion eines Index-Paares für die stetige Abbildung

– Definition der Index-Abbildung

Gliederung.

- Algorithmus zur Konstruktion einer kombinatorischen Einschließung für eine stetige Abbildung

- Algorithmus zur Bestimmung der kombinatorischen invarianten Menge der kombinatorischen Einschließung

- Algorithmus zur Konstruktion eines Index-Paares für die stetige Abbildung

- Definition der Index-Abbildung

- Homologische Version des Wążewski Prinzips

Gliederung

– Algorithmus zur Konstruktion einer kombinatorischen Einschließung für eine stetige Abbildung

– Algorithmus zur Bestimmung der kombinatorischen invarianten Menge der kombinatorischen Einschließung

– Algorithmus zur Konstruktion eines Index-Paares für die stetige Abbildung

– Definition der Index-Abbildung

– Homologische Version des Ważewski Prinzips

– Definition des Homology-Conley-Index

Definition 1.1 Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt *volle kubische Menge*, wenn es eine endliche Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}_{max}(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass

$$X = |\mathcal{X}| := \bigcup_{Q \in \mathcal{X}} Q.$$

Definition 1.1 Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt *volle kubische Menge*, wenn es eine endliche Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}_{max}(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass

$$X = |\mathcal{X}| := \bigcup_{Q \in \mathcal{X}} Q.$$

Definition 1.2 Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt. Dann heißt die Menge

$$\operatorname{wrap}(A) := \{Q \in \mathcal{K}_{max} \mid Q \cap A \neq \emptyset\}$$

die *kubische Ummantelung* von A. Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ bzw. eine endliche Sammlung $\mathcal{X}$ elementarer Kuben in $\mathbb{R}^d$ definiert man

$$\operatorname{wrap}(x) := \operatorname{wrap}(\{x\}) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{wrap}(\mathcal{X}) := \operatorname{wrap}(|\mathcal{X}|).$$

Definition 1.1 Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt *volle kubische Menge*, wenn es eine endliche Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}_{max}(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass

$$X = |\mathcal{X}| := \bigcup_{Q \in \mathcal{X}} Q.$$

Definition 1.2 Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt. Dann heißt die Menge

$$\operatorname{wrap}(A) := \{Q \in \mathcal{K}_{max} \mid Q \cap A \neq \emptyset\}$$

die *kubische Ummantelung* von A. Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ bzw. eine endliche Sammlung $\mathcal{X}$ elementarer Kuben in $\mathbb{R}^d$ definiert man

$$\operatorname{wrap}(x) := \operatorname{wrap}(\{x\}) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{wrap}(\mathcal{X}) := \operatorname{wrap}(|\mathcal{X}|).$$

Definition 1.3 Für eine endliche Sammlung $\mathcal{X}$ elementarer Kuben sei das sogenannte *collar von $\mathcal{X}$* definiert durch $\operatorname{col}(\mathcal{X}) := \operatorname{wrap}(\mathcal{X}) \setminus \mathcal{X}$.

Definition 1.4 Eine kombinatorische mehrwertige Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ ist eine *kombinatorische Einschließung* von $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, wenn gilt:

$$\mathrm{wrap}\,(f(Q)) \subset \mathcal{F}(Q) \qquad \forall\, Q \in \mathcal{K}_{max}.$$

Definition 1.4 Eine kombinatorische mehrwertige Abbildung $\mathcal{F}:\mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ ist eine *kombinatorische Einschließung* von $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, wenn gilt:

$$\operatorname{wrap}(f(Q)) \subset \mathcal{F}(Q) \qquad \forall\, Q \in \mathcal{K}_{max}.$$

Proposition 1.5 Sei X eine volle kubische Menge. Dann gilt:

$$\operatorname{int} X = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{wrap}(x) \subset \mathcal{K}_{max}(X)\right\}.$$

Definition 1.4 Eine kombinatorische mehrwertige Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ ist eine *kombinatorische Einschließung* von $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, wenn gilt:

$$\operatorname{wrap}(f(Q)) \subset \mathcal{F}(Q) \qquad \forall\, Q \in \mathcal{K}_{max}.$$

Proposition 1.5 Sei X eine volle kubische Menge. Dann gilt:

$$\operatorname{int} X = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{wrap}(x) \subset \mathcal{K}_{max}(X) \right\}.$$

Proposition 1.6 Die kombinatorische mehrwertige Abbildung $\mathcal{F}$ ist eine kombinatorische Einschließung von f, wenn gilt:

$$f(Q) \subset \operatorname{int}(|\mathcal{F}(Q)|) \qquad \forall\, Q \in \operatorname{wrap}(x),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Algorithm 1.7 Combinatorial enclosure

```
>    function combinatorialEnclosure(cubicalSet X, rationalMap f)
>    for each Q in X do
>        A := evaluate(f, Q);
>        U := cubicalWrap(A);
>        F{Q} := U;
>    endfor;
>    return F;
```

Definition 1.8 Eine kompakte Menge $N \subset X$ ist eine *isolierende Umgebung* für eine stetige Abbildung f, wenn

$$\{x \in N \mid \exists \sigma_x : \mathbb{Z} \to N\} =: \mathrm{Inv}\,(N, f) \subset \mathrm{int}\, N.$$

Eine invariante Menge S heißt *isoliert* unter f, wenn eine isolierende Umgebung N exisitiert, so dass

$$S = \mathrm{Inv}\,(N, f).$$

Definition 1.8 Eine kompakte Menge $N \subset X$ ist eine *isolierende Umgebung* für eine stetige Abbildung f, wenn

$$\{x \in N \mid \exists \sigma_x : \mathbb{Z} \to N\} =: \operatorname{Inv}(N, f) \subset \operatorname{int} N.$$

Eine invariante Menge S heißt *isoliert* unter f, wenn eine isolierende Umgebung N exisitiert, so dass

$$S = \operatorname{Inv}(N, f).$$

Proposition 1.9 Eine kompakte Menge N ist eine isolierende Umgebung für f genau dann, wenn

$$\forall\, x \in \operatorname{bd} N \qquad \nexists\, \sigma_x : \mathbb{Z} \to N.$$

Definition 1.8 Eine kompakte Menge $N \subset X$ ist eine *isolierende Umgebung* für eine stetige Abbildung f, wenn

$$\{x \in N \mid \exists \sigma_x : \mathbb{Z} \to N\} =: \mathrm{Inv}\,(N, f) \subset \mathrm{int}\, N.$$

Eine invariante Menge S heißt *isoliert* unter f, wenn eine isolierende Umgebung N exisitiert, so dass

$$S = \mathrm{Inv}\,(N, f).$$

Proposition 1.9 Eine kompakte Menge N ist eine isolierende Umgebung für f genau dann, wenn

$$\forall\, x \in \mathrm{bd}\, N \quad \nexists\, \sigma_x : \mathbb{Z} \to N.$$

Definition 1.10 Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung. Unter einer *f-boundary* von $A \subset X$ versteht man die Menge

$$\mathrm{bd}_f(A) := \mathrm{cl}\,(f(A) \backslash A) \cap A.$$

Beispiel 1.11 Betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $A := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \le 4\big\}$.

Offensichtlich ist $f(A) = [-8, 8] \times [-2, 2]$.

Man erhält

$$\begin{aligned} \mathrm{bd}_f(A) &= \mathrm{cl}\,(f(A) \backslash A) \cap A \\ &= \mathrm{cl}\,\big(([-8, 8] \times [-2, 2]) \backslash [-4, 4]^2\big) \cap [-4, 4]^2 \\ &= \{\pm 4\} \times [-2, 2]. \end{aligned}$$

Definition 1.12 Ein *Index-Paar* für f ist ein Paar kompakter Mengen $P = (P_1, P_0)$, $P_0 \subset P_1$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\operatorname{Inv}(\operatorname{cl}(P_1 \setminus P_0), f) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(P_1 \setminus P_0))$; *(isolation)*

(b) $f(P_0) \cap P_1 \subset P_0$; *(positive invariance)*

(c) $\operatorname{bd}_f(P_1) \subset P_0$; *(exit set)*

Definition 1.12 Ein *Index-Paar* für f ist ein Paar kompakter Mengen $P = (P_1, P_0)$, $P_0 \subset P_1$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathrm{Inv}\,(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0))\,;$ (*isolation*)

(b) $f(P_0) \cap P_1 \subset P_0;$ (*positive invariance*)

(c) $\mathrm{bd}_f(P_1) \subset P_0;$ (*exit set*)

Bemerkungen 1.13

i) Ein Index-Paar für die Abbildung f aus dem Beispiel 1.11 ist das Paar $(P_1, P_0) = (A, \mathrm{bd}_f(A))$.

ii) Die leere Menge ist eine kubische Menge. Es gilt $\emptyset = \mathrm{Inv}\,(\emptyset, f) \subset \mathrm{int}\,\emptyset = \emptyset$. Folglich ist die leere Menge eine isolierte invariante Menge.

iii) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x+1$. Weiterhin sei $N = \{0\} \cup \{1\}$. Dann ist $\mathrm{Inv}(N, f) = \emptyset$ und $(P_1, P_0) = (N, \{1\})$ ein Index-Paar für f. Beachte:

$$\{H_k(P_1, P_0)\}_{k\in\mathbb{Z}} = H_*(\{0\} \cup \{1\}, \{1\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}.$$

Man kann also nicht aus $H_*(P_1, P_0) \neq 0$ folgern, dass $\mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \neq \emptyset$.

Definition 1.14 Eine *volle Lösung durch* $Q \in \mathcal{K}_{max}$ *unter* $\mathcal{F}$ ist eine Funktion $\Gamma_Q : \mathbb{Z} \to \mathcal{K}_{max}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $\Gamma_Q(0) = Q$;

(ii) $\Gamma_Q(n+1) \in \mathcal{F}(\Gamma_Q(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.14 Eine *volle Lösung durch $Q \in \mathcal{K}_{max}$ unter $\mathcal{F}$* ist eine Funktion $\Gamma_Q : \mathbb{Z} \to \mathcal{K}_{max}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $\Gamma_Q(0) = Q$;

(ii) $\Gamma_Q(n+1) \in \mathcal{F}(\Gamma_Q(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.15 Sei $\mathcal{N}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{K}_{max}$. Die *maximale invariante Menge* in $\mathcal{N}$ unter $\mathcal{F}$ ist

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) := \{Q \in \mathcal{N} \mid \exists\, \Gamma_Q : \mathbb{Z} \to \mathcal{N}\}.$$

Entsprechend ist die *positive* bzw. *negative maximale invariante Menge* definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}^+(\mathcal{N}, \mathcal{F}) &:= \{Q \in \mathcal{N} \mid \exists\, \Gamma_Q : \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{N}\} \text{ bzw.} \\ \mathrm{Inv}^-(\mathcal{N}, \mathcal{F}) &:= \{Q \in \mathcal{N} \mid \exists\, \Gamma_Q : \mathbb{Z}^- \to \mathcal{N}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.16 Die *Inverse* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ von $\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}^{-1}(R) := \{Q \in \mathcal{K}_{max} \mid R \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Da die Möglichkeit besteht, dass $\mathcal{F}^{-1}$ aus einer unendlichen Anzahl von Kuben besteht, definiert man $\mathcal{F}_{\mathcal{X}} := \mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ mit einer endlichen Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}_{max}$ und entsprechend die Inverse von $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ durch

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}}^{-1}(R) := \{Q \in \mathcal{X} \mid R \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Definition 1.16 Die *Inverse* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ von $\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}^{-1}(R) := \{Q \in \mathcal{K}_{max} \mid R \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Da die Möglichkeit besteht, dass $\mathcal{F}^{-1}$ aus einer unendlichen Anzahl von Kuben besteht, definiert man $\mathcal{F}_{\mathcal{X}} := \mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ mit einer endlichen Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}_{max}$ und entsprechend die Inverse von $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ durch

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}}^{-1}(R) := \{Q \in \mathcal{X} \mid R \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Proposition 1.17 Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}_{max}$ und $\mathcal{F} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inv}^-(\mathcal{N},\mathcal{F}) \cap \mathrm{Inv}^+(\mathcal{N},\mathcal{F}) &= \mathrm{Inv}(\mathcal{N},\mathcal{F}),\\
\mathcal{F}(\mathrm{Inv}^-(\mathcal{N},\mathcal{F})) \cap \mathcal{N} &\subset \mathrm{Inv}^-(\mathcal{N},\mathcal{F}),\\
\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{Inv}^+(\mathcal{N},\mathcal{F})) \cap \mathcal{N} &\subset \mathrm{Inv}^+(\mathcal{N},\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

Definition 1.16 Die *Inverse* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ von $\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}^{-1}(R) := \{Q \in \mathcal{K}_{max} \mid R \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Da die Möglichkeit besteht, dass $\mathcal{F}^{-1}$ aus einer unendlichen Anzahl von Kuben besteht, definiert man $\mathcal{F}_{\mathcal{X}} := \mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ mit einer endlichen Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}_{max}$ und entsprechend die Inverse von $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ durch

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}}^{-1}(R) := \{Q \in \mathcal{X} \mid R \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Proposition 1.17 Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}_{max}$ und $\mathcal{F} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Inv}^-(\mathcal{N},\mathcal{F}) \cap \operatorname{Inv}^+(\mathcal{N},\mathcal{F}) &= \operatorname{Inv}(\mathcal{N},\mathcal{F}),\\
\mathcal{F}(\operatorname{Inv}^-(\mathcal{N},\mathcal{F})) \cap \mathcal{N} &\subset \operatorname{Inv}^-(\mathcal{N},\mathcal{F}),\\
\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{Inv}^+(\mathcal{N},\mathcal{F})) \cap \mathcal{N} &\subset \operatorname{Inv}^+(\mathcal{N},\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

Theorem 1.18 Sei $\mathcal{F} : \mathcal{K}_{max} \rightrightarrows \mathcal{K}_{max}$ eine kombinatorische mehrwertige Abbildung und $\mathcal{N}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{K}_{max}$. Die Folge von Teilmengen $\mathcal{S}_j \in \mathcal{K}_{max}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &:= \mathcal{N},\\
\mathcal{S}_{j+1} &:= \mathcal{F}(\mathcal{S}_j) \cap \mathcal{S}_j \cap \mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(\mathcal{S}_j).
\end{aligned}$$

Dann gilt: $\quad \exists j_0 : \;\; \mathcal{S}_j = \mathcal{S}_{j_0} \;\forall\, j \geq j_0 \;$ und $\; \mathcal{S}_{j_0} = \operatorname{Inv}(\mathcal{N},\mathcal{F})$.

Beweis. Es gilt $\mathcal{S}_{j+1} \subset \mathcal{S}_j \ \forall j = 0, 1, 2, \dots$. Da $\mathcal{S}_0$ endlich ist, muss es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_{j_0} \ \forall j \geq j_0$.

Behauptung: $\mathcal{S}_{j_0} \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F})$.

Aus der Gleichheit

$$\mathcal{S}_{j_0} = \mathcal{S}_{j_0+1} = \mathcal{F}(\mathcal{S}_{j_0}) \cap \mathcal{S}_{j_0} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(\mathcal{S}_{j_0})$$

folgt, dass es für jedes $Q \in \mathcal{S}_{j_0}$ Elemente $K, L \in \mathcal{S}_{j_0}$ gibt, so dass $Q \in \mathcal{F}(K)$ und $L \in \mathcal{F}(Q)$. Das gleiche Argument kann man auf K und L anwenden. Somit lässt sich eine Lösung $\Gamma_Q : \mathbb{Z} \to \mathcal{K}_{max}$ durch Q unter $\mathcal{F}$ definieren indem man setzt:

$$\Gamma_Q(0) := Q, \quad \Gamma_Q(-1) := K, \quad \Gamma_Q(1) := L.$$

Die Lösung lässt sich induktiv zu einer vollen Lösung fortsetzen.
Da $\mathcal{S}_{j_0} \subset \mathcal{N}$ und $Q \in \mathcal{S}_{j_0}$ beliebig gewählt wurde, erhält man

$$\mathcal{S}_{j_0} = \mathrm{Inv}(\mathcal{S}_{j_0}, \mathcal{F}) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}).$$

Behauptung: $\operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{S}_{j_0}$.

Es genügt $\operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{S}_k \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots$ zu zeigen, denn

$$\mathcal{S}_{j_0} = \bigcap_{k=0}^{j_0} \mathcal{S}_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k.$$

Beweis per Induktion über k.

Für $k = 0$ gilt nach Definition $\operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{N} = \mathcal{S}_0$.

Sei nun also $\operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{S}_k$. Für alle $Q \in \operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F})$ gibt es eine Lösung $\Gamma_Q : \mathbb{Z} \to \operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F})$ durch Q unter $\mathcal{F}$.

Setze $Q_n := \Gamma_Q(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$. Nach Induktionsannahme ist $Q_n \in \mathcal{S}_k \ \forall n$.

Es ist $Q = Q_0 \in \mathcal{F}(Q_{-1})$ und $Q_1 \in \mathcal{F}(Q)$ bzw. $Q \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(Q_1)$. Man erhält

$$Q \in \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F}(Q_{-1}) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(Q_1) \subset \mathcal{S}_k \cap \mathcal{F}(\mathcal{S}_k) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{N}}^{-1}(\mathcal{S}_k) = \mathcal{S}_{k+1}.$$

Also ist $Q \in \mathcal{S}_{k+1}$ und somit $\operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{S}_{k+1}$. $\square$

Algorithm 1.19 Combinatorial invariant set

> **function** invariantPart(set N, combinatorialMap F)
> $F :=$ restrictedMap(F, N);
> $Finv :=$ evaluateInverse(F);
> $S := N$;
> **repeat**
> $S^{'} := S$;
> $S^{''} :=$ **interection**(S, evaluate(F, S));
> $S :=$ **interection**($S^{''}$, evaluate($Finv$, S));
> **until** $(S = S^{'})$;
> **return** S;

Algorithm 1.19 Combinatorial invariant set

\> **function** invariantPart(set N, combinatorialMap F)
\> $F :=$ restrictedMap(F, N);
\> $Finv :=$ evaluateInverse(F);
\> $S := N$;
\> **repeat**
\> $S^{'} := S$;
\> $S^{''} :=$ **interection**(S, evaluate(F, S));
\> $S :=$ **interection**($S^{''}$, evaluate($Finv$, S));
\> **until** $(S = S^{'})$;
\> **return** S;

Definition 1.20 Sei $\mathcal{N}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{K}_{max}$.
$\mathcal{N}$ ist eine *isolierende Umgebung*, wenn

$$\mathrm{wrap}\,(\mathrm{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F})) \subset \mathcal{N}.$$

Algorithm 1.21 Combinatorial index pair

```
>    function indexPair(cubicalSet N, combinatorialMap F)
>    S := invariantPart(N, F);
>    M := cubicalWrap(S);
>    if subset(M, N) then
>        F := restrictedMap(F, M);
>        C := collar(S);
>        P0 := interection(evaluate(F, S), C);
>        repeat
>            lastP0 := P0;
>            P0 := interection(evaluate(F, P0), C);
>            P0 := union(P0, lastP0);
>        until (P0 = lastP0);
>        P1 := union(S, P0);
>        Pbar1 := evaluate(F, P1);
>        Pbar0 := setminus(Pbar1, S);
>        return (P1, P0, Pbar1, Pbar0);
>    else
>        return "Failure";
>    endif
```

Theorem 1.22 Es stehe F im Algorithmus 1.21 für eine kombinatorische Einschließung $\mathcal{F}$ einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{N}$ sei eine Repräsentation einer kubische Menge N. Wenn der Algorithmus nicht „Failure“ zurückgibt, erhält man Repräsentationen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0, \bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_0$ von kubischen Mengen $P_1, P_0, \bar{P}_1, \bar{P}_0$, so dass für $\mathcal{S} := \mathrm{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F})$ gilt:

(i) $|\mathcal{S}|$ ist eine isolierende Umgebung für f,

(ii) (P_1, P_0) ist ein Index-Paar für f, welches $\mathrm{Inv}(|\mathcal{S}|, f)$ isoliert,

(iii) $P_i \subset \bar{P}_i$ für $i = 0, 1$,

(iv) $f(P_i) \subset \bar{P}_i$ für $i = 0, 1$.

Beweis. Zu (i): ($|\mathcal{S}|$ ist eine isolierende Umgebung für f.)

Unter der Annahme, dass der Algorithmus nicht „Failure“ zurückgibt, ist $\operatorname{wrap}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{N}$. Folglich ist $\mathcal{N}$ eine isolierende Umgebung für $\mathcal{F}$.

Angenommen $|\mathcal{S}|$ ist nun keine isolierende Umgebung für f.

Das bedeutet, dass $\operatorname{Inv}(|\mathcal{S}|, f) \cap \operatorname{bd}|\mathcal{S}| \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine volle Lösung $\gamma_x : \mathbb{Z} \to |\mathcal{S}|$ durch einen Randpunkt $x \in \operatorname{bd}|\mathcal{S}|$ unter f.

Wähle nun $Q \in \operatorname{wrap}(x) \setminus \mathcal{S}$ und definiere $\Gamma_Q : \mathbb{Z} \to \mathcal{K}_{max}$ durch $\Gamma_Q(0) := Q$. Für $n \neq 0$ sei $\Gamma_Q(n)$ irgendein Element von $\operatorname{wrap}(\gamma_x(n))$. Dann gilt nach Definition 1.4

$$\Gamma_Q(n+1) \in \operatorname{wrap}(\gamma_x(n+1)) = \operatorname{wrap}(f(\gamma_x(n))) \subset \mathcal{F}(\Gamma_Q(n)).$$

Also ist Γ_Q eine volle Lösung durch Q unter $\mathcal{F}$.

Außerdem ist $\Gamma_Q(n) \in \operatorname{wrap}(\gamma_x(n)) \subset \operatorname{wrap}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{N}$ wegen $\gamma_x(n) \in |\mathcal{S}|$.

Somit ist Γ_Q eine volle Lösung in der isolierenden Umgebung $\mathcal{N}$ und daher $Q = \Gamma_Q(0) \in \operatorname{Inv}(\mathcal{N}, \mathcal{F}) = \mathcal{S}$ im Widerspruch zur Wahl von Q.

Zu (ii): ((P_1, P_0) ist ein Index-Paar für f, welches $\mathrm{Inv}(|\mathcal{S}|, f)$ isoliert.)

Sei $\mathcal{P}_0^{(0)}$ der erste Wert, der $P0$ zugewiesen wird und $\mathcal{P}_0^{(i)}, i = 0, 1, 2, \ldots$ der Wert von $P0$ beim i-ten Durchlauf der repeat-until Schleife. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^{(0)} &= \mathcal{F}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{col}\,(\mathcal{S}), \\ \mathcal{P}_0^{(i+1)} &= \mathcal{P}_0^{(i)} \cup \Big(\mathcal{F}(\mathcal{P}_0^{(i)}) \cap \mathrm{col}\,(\mathcal{S})\Big), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt: $\mathcal{P}_0^{(i)} \subset \mathrm{col}\,(\mathcal{S})$ und $\mathcal{P}_0^{(i)} \subset \mathcal{P}_0^{(i+1)}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Es gibt sogar einen Index i_0, so dass $\mathcal{P}_0^{(i_0)} = \mathcal{P}_0^{(i_0+1)}$, da sonst $\{\mathcal{P}_0^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine unendliche, streng monoton wachsende Folge von endlichen Teilmengen von $\mathrm{col}(\mathcal{S})$ wäre, was offensichtlich unmöglich ist. Folglich wird die Schleife (und somit der gesamte Algorithmus) immer verlassen.

Man erhält also:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \mathcal{P}_0^{(i_0)}, \\ \mathcal{P}_0 &\subset \mathrm{col}\,(\mathcal{S}), \\ \mathcal{P}_0 &\cap \mathcal{S} = \emptyset. \end{aligned}$$

Zu (a): $\quad (\; \mathrm{Inv}\,(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0)) \;)$

Es ist $\mathcal{P}_1 = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_0$ und wegen $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{S} = \emptyset$ ist $\mathcal{P}_1 \backslash \mathcal{P}_0 = \mathcal{S}$.

Man erhält

$$P_1 \backslash P_0 = |\mathcal{P}_1| \backslash |\mathcal{P}_0| = \bigcup_{Q \in \mathcal{P}_1} Q \backslash |\mathcal{P}_0| = \bigcup_{Q \in \mathcal{S}} Q \backslash |\mathcal{P}_0|.$$

Also ist

$$\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0) = \bigcup_{Q \in \mathcal{S}} \mathrm{cl}(Q \backslash |\mathcal{P}_0|) = \bigcup_{Q \in \mathcal{S}} Q = |\mathcal{S}|.$$

Somit ist Eigenschaft (a) schon bewiesen in (i).

Zu (b): ($f(P_0) \cap P_1 \subset P_0$)

Zunächst zeigt man, dass $\mathcal{F}(\mathcal{P}_0) \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Zu (b): ($f(P_0) \cap P_1 \subset P_0$)

Zunächst zeigt man, dass $\mathcal{F}(\mathcal{P}_0) \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Zusammen mit $\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \backslash \mathcal{P}_0$ folgt dann $\mathcal{F}(\mathcal{P}_0) \cap \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$.

Sei nun $x \in P_0$ und $f(x) \in P_1$.

Dann ist $x \in Q$ für ein $Q \in \mathcal{P}_0$ und $f(x) \in R$ für ein $R \in \mathcal{P}_1$.

Mit Definition 1.4 erhält man

$$R \in \mathrm{wrap}(f(x)) \subset \mathcal{F}(Q) \subset \mathcal{F}(\mathcal{P}_0).$$

Aus $\mathcal{F}(\mathcal{P}_0) \cap \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$ folgt $R \in \mathcal{P}_0$ und somit $f(x) \in P_0$.

Zu (c): ($\mathrm{bd}_f(P_1) \subset P_0$)

Zunächst zeigt man, dass

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_1) \cap \mathrm{col}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}_0 \quad \text{und} \quad \mathrm{bd}\, P_1 \subset |\mathrm{col}(\mathcal{S})|.$$

Zu (c): ($\mathrm{bd}_f(P_1) \subset P_0$)

Zunächst zeigt man, dass

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_1) \cap \mathrm{col}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}_0 \quad \text{und} \quad \mathrm{bd}\, P_1 \subset |\mathrm{col}(\mathcal{S})|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{bd}_f(P_1) &= \mathrm{cl}(f(P_1) \backslash P_1) \cap P_1 \\ &\subset f(P_1) \cap \mathrm{bd}\, P_1 \\ &\subset \mathrm{int}\, |\mathcal{F}(\mathcal{P}_1)| \cap |\mathrm{col}(\mathcal{S})| \\ &\subset |\mathcal{F}(\mathcal{P}_1) \cap \mathrm{col}(\mathcal{S})| \subset |\mathcal{P}_0| = P_0. \end{aligned}$$

Zu (iii): ($P_i \subset \bar{P}_i$ für $i = 0, 1$)

Zunächst zeigt man, dass $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{P}_1) \backslash \mathcal{S}$.

Zu (iii): ($P_i \subset \bar{P}_i$ für $i = 0, 1$)

Zunächst zeigt man, dass $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{P}_1)\backslash\mathcal{S}$.

Wegen $\bar{\mathcal{P}}_0 = \bar{\mathcal{P}}_1\backslash\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathcal{P}_1)\backslash\mathcal{S}$ folgt also $\mathcal{P}_0 \subset \bar{\mathcal{P}}_0$ und somit auch $P_0 \subset \bar{P}_0$.

Weiterhin ist

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{S}) \cup (\mathcal{F}(\mathcal{P}_1)\backslash\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{P}_1) = \bar{\mathcal{P}}_1.$$

Zu (iv): ($f(P_i) \subset \bar{P}_i$ für $i = 0, 1$)

Für $i = 0, 1$ ist

$$f(P_i) = \bigcup_{Q \in \mathcal{P}_i} f(Q) \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{P}_i} |\mathcal{F}(Q)| = |\mathcal{F}(\mathcal{P}_i)|.$$

Daher ist

$$f(P_1) \subset |\mathcal{F}(\mathcal{P}_1)| = |\bar{\mathcal{P}}_1| = \bar{P}_1,$$

Wegen $\mathcal{F}(\mathcal{P}_0) \cap \mathcal{S} = \emptyset$ (gezeigt in (ii) (b)) ist

$$f(P_0) \subset |\mathcal{F}(\mathcal{P}_0)| \subset |\mathcal{F}(\mathcal{P}_0) \backslash \mathcal{S}| \subset |\mathcal{F}(\mathcal{P}_1) \backslash \mathcal{S}| = |\bar{\mathcal{P}}_0| = \bar{P}_0. \quad \square$$

Lemma 1.23 Es seien die Abbildungen f, $\mathcal{F}$ und die kubischen Mengen $P_1, P_0, \bar{P}_1, \bar{P}_0$ gegeben wie im Theorem 1.22.
Dann induziert die Inklusionsabbildung $\iota : (P_1, P_0) \to (\bar{P}_1, \bar{P}_0)$ einen Isomorphismus $\iota_* : H_*(P_1, P_0) \to H_*(\bar{P}_1, \bar{P}_0)$.

Beweis. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0, \bar{\mathcal{P}}_1$ und $\bar{\mathcal{P}}_0$ wie im Beweis zu Theorem 1.22.

Mit $\mathcal{R} := (\mathcal{F}(\mathcal{P}_1)\backslash\mathcal{S}) \setminus \mathcal{P}_0$ ist $\bar{\mathcal{P}}_1\backslash\mathcal{P}_1 = \mathcal{R} = \bar{\mathcal{P}}_0\backslash\mathcal{P}_0$.

Man erhält

$$\bar{P}_1\backslash P_1 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_1} Q\backslash P_1 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_1\backslash\mathcal{P}_1} Q\backslash P_1 = \bigcup_{Q\in\mathcal{R}} Q\backslash P_1$$

und

$$\bar{P}_0\backslash P_0 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_0} Q\backslash P_0 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_0\backslash\mathcal{P}_0} Q\backslash P_0 = \bigcup_{Q\in\mathcal{R}} Q\backslash P_0.$$

Es gilt $Q\backslash P_0 = Q\backslash P_1$ für $Q \in \mathcal{R}$.

Beweis. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0, \bar{\mathcal{P}}_1$ und $\bar{\mathcal{P}}_0$ wie im Beweis zu Theorem 1.22.

Mit $\mathcal{R} := (\mathcal{F}(\mathcal{P}_1)\backslash\mathcal{S}) \setminus \mathcal{P}_0$ ist $\bar{\mathcal{P}}_1\backslash\mathcal{P}_1 = \mathcal{R} = \bar{\mathcal{P}}_0\backslash\mathcal{P}_0$.

Man erhält

$$\bar{P}_1\backslash P_1 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_1} Q\backslash P_1 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_1\backslash\mathcal{P}_1} Q\backslash P_1 = \bigcup_{Q\in\mathcal{R}} Q\backslash P_1$$

und

$$\bar{P}_0\backslash P_0 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_0} Q\backslash P_0 = \bigcup_{Q\in\bar{\mathcal{P}}_0\backslash\mathcal{P}_0} Q\backslash P_0 = \bigcup_{Q\in\mathcal{R}} Q\backslash P_0.$$

Es gilt $Q\backslash P_0 = Q\backslash P_1$ für $Q \in \mathcal{R}$.

Folglich ist $\bar{P}_1\backslash P_1 = \bar{P}_0\backslash P_0$ und mit $U := \bar{P}_1\backslash P_1$ erhält man $P_i = \bar{P}_i\backslash U$.

Mit $X := \bar{P}_1$ und $A := \bar{P}_0$ folgt die Behauptung aus folgendem Theorem:

Theorem 9.14 Let (X, A) be a cubical pair and $U \subset A$ representable. Then $X\backslash U$ is a cubical set and the inclusion map $\iota : (X\backslash U, A\backslash U) \to (X, A)$ induces an isomorphism $\iota_* : H_*(X\backslash U, A\backslash U) \to H_*(X, A)$ $\quad\square$

Bemerkungen.

i) Nach Lemma 1.23 ist also die Abbildung $\iota_*^{-1} : H_*(\bar{P}_1, \bar{P}_0) \longrightarrow H_*(P_1, P_0)$ wohldefiniert.

ii) Nach Theorem 1.22 (iv) ist auch die Abbildung $f : (P_1, P_0) \longrightarrow (\bar{P}_1, \bar{P}_0)$ wohldefiniert und induziert eine Homologie-Abbildung.

Bemerkungen.

i) Nach Lemma 1.23 ist also die Abbildung $\iota_*^{-1} : H_*(\bar{P}_1, \bar{P}_0) \longrightarrow H_*(P_1, P_0)$ wohldefiniert.

ii) Nach Theorem 1.22 (iv) ist auch die Abbildung $f : (P_1, P_0) \longrightarrow (\bar{P}_1, \bar{P}_0)$ wohldefiniert und induziert eine Homologie-Abbildung.

Definition 1.24 Sei $P = (P_1, P_0)$ ein kubisches Index-Paar für f konstruiert durch den Algorithmus 1.21. Die *verknüpfte Index-Abbildung* ist definiert durch

$$f_{P*} := \iota_*^{-1} \circ f_* : H_*(P_1, P_0) \longrightarrow H_*(P_1, P_0).$$

Bemerkungen.

i) Nach Lemma 1.23 ist also die Abbildung $\iota_*^{-1} : H_*(\bar{P}_1, \bar{P}_0) \to H_*(P_1, P_0)$ wohldefiniert.

ii) Nach Theorem 1.22 (iv) ist auch die Abbildung $f : (P_1, P_0) \to (\bar{P}_1, \bar{P}_0)$ wohldefiniert und induziert eine Homologie-Abbildung.

Definition 1.24 Sei $P = (P_1, P_0)$ ein kubisches Index-Paar für f konstruiert durch den Algorithmus 1.21. Die *verknüpfte Index-Abbildung* ist definiert durch

$$f_{P*} := \iota_*^{-1} \circ f_* : H_*(P_1, P_0) \to H_*(P_1, P_0).$$

Definition 1.25 Sei G eine abelsche Gruppe. Ein Homomorphismus $L : G \to G$ ist *nilpotent*, wenn ein $n > 0, n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $L^n = 0$.

Theorem 1.26 Sei $P = (P_1, P_0)$ ein kubisches Index-Paar für f konstruiert durch den Algorithmus 1.21. Wenn die verknüpfte Index-Abbildung f_{P*} nicht nilpotent ist, gilt

$$\mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \neq \emptyset.$$

Theorem 1.26 Sei $P = (P_1, P_0)$ ein kubisches Index-Paar für f konstruiert durch den Algorithmus 1.21. Wenn die verknüpfte Index-Abbildung f_{P*} nicht nilpotent ist, gilt

$$\mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \neq \emptyset.$$

Bemerkungen.

i) Dieses Theorem kann man als homologische Version des Ważewski-Prinzips interpretieren.

ii) Ist $\mathcal{F}$ eine kombinatorische Einschließung von f, dann ist $\mathcal{F}$ auch für jede stetige Abbildung g mit genügend kleiner Störung eine kombinatorische Einschließung, d.h. wenn $P = (P_1, P_0)$ ein Index-Paar für f ist, dann ist es auch ein Index-Paar für g.
Ist f_{P*} nicht nilpotent, dann ist auch g_{P*} nicht nilpotent. Folglich ist $\mathrm{Inv}\,(\mathrm{cl}\,(P_1 \backslash P_0), f) \neq \emptyset$ und $\mathrm{Inv}\,(\mathrm{cl}\,(P_1 \backslash P_0), g) \neq \emptyset$ für jedes g genügend dicht bei f. Wobei „genügend dicht“ nur von der Wahl von $\mathcal{F}$ abhängt.

iii) Es seien (P_1, P_0) und (Q_1, Q_0) Index-Paare für f. Wenn $S = \mathrm{Inv}\,(\mathrm{cl}\,(P_1 \backslash P_0), f) = \mathrm{Inv}\,(\mathrm{cl}\,(Q_1 \backslash Q_0), f)$ garantiert die Conley-Index Theorie, dass f_{P*} und g_{P*} shift äquivalent sind.

Definition 1.27 Zwei Gruppenhomomorphismen zwischen abelschen Gruppen $f : G \to G$ und $g : G' \to G'$ sind *shift äquivalent*, wenn Gruppenhomomorphismen $r : G \to G'$ und $s : G' \to G$ und eine natürliche Zahl m existieren, so dass

$$r \circ f = g \circ r, \quad s \circ g = f \circ s, \quad r \circ s = g^m, \quad s \circ r = f^m.$$

Definition 1.27 Zwei Gruppenhomomorphismen zwischen abelschen Gruppen $f : G \rightarrow G$ und $g : G^{'} \rightarrow G^{'}$ sind *shift äquivalent*, wenn Gruppenhomomorphismen $r : G \rightarrow G^{'}$ und $s : G^{'} \rightarrow G$ und eine natürliche Zahl m existieren, so dass

$$r \circ f = g \circ r, \quad s \circ g = f \circ s, \quad r \circ s = g^m, \quad s \circ r = f^m.$$

Proposition 1.28 Seien $f : G \rightarrow G$ und $g : G^{'} \rightarrow G^{'}$ Gruppenhomomorphismen die shift äquivalent sind. Dann ist f genau dann nilpotent, wenn g nilpotent ist.

Definition 1.29 Seien $f : X \to X$ eine stetige Abbildung, S eine isolierte invariante Menge und (P_1, P_0) ein Index-Paar für f, so dass $S = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f)$. Der *Homology-Conley-Index* für S ist die shift Äquivalenzklasse der Index-Abbildung f_{P*}.

Definition 1.29 Seien $f : X \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, S eine isolierte invariante Menge und (P_1, P_0) ein Index-Paar für f, so dass $S = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f)$. Der *Homology-Conley-Index* für S ist die shift Äquivalenzklasse der Index-Abbildung f_{P*}.

Theorem 1.26 Sei $P = (P_1, P_0)$ ein kubisches Index-Paar für f konstruiert durch den Algorithmus 1.21. Wenn die verknüpfte Index-Abbildung f_{P*} nicht nilpotent ist, gilt

$$\mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \neq \emptyset.$$

Definition 1.29 Seien $f : X \to X$ eine stetige Abbildung, S eine isolierte invariante Menge und (P_1, P_0) ein Index-Paar für f, so dass $S = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f)$. Der *Homology-Conley-Index* für S ist die shift Äquivalenzklasse der Index-Abbildung f_{P*}.

Theorem 1.26 Sei $P = (P_1, P_0)$ ein kubisches Index-Paar für f konstruiert durch den Algorithmus 1.21. Wenn die verknüpfte Index-Abbildung f_{P*} nicht nilpotent ist, gilt

$$\mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(P_1 \backslash P_0), f) \neq \emptyset.$$

Beweis. Behauptung: $\quad \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(\mathcal{P}_1 \backslash \mathcal{P}_0), f) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad f_{P*}$ ist nilpotent.

Die leere Menge $\emptyset$ ist eine isolierte invariante Menge für jede stetige Funktion f. Das Paar $(\emptyset, \emptyset)$ ist ein Index-Paar für $\emptyset$.

Sei $g_* : H_*(\emptyset, \emptyset) \to H_*(\emptyset, \emptyset)$ die induzierte Index-Abbildung.
Es ist $g_* = 0$, d.h. g_* ist nilpotent.

Da der Conley-Index wohldefiniert ist, sind g_* und f_{P*} shift äquivalent.
Folglich ist f_{P*} nilpotent nach Proposition 1.28. $\square$