Blätterungen im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen

Doris Bohnet

30.08.2007

Gliederung

Einleitung

- Existenz von Blätterungen im Zusammenhang von partiellen Differentialgleichungen (PDE)
- Verständnis der qualitativen Dynamik von PDEs mit Hilfe von Blätterungen

Einleitung

Was ist eigentlich eine Blätterung?

Eine Blätterung ist eine disjunkte Zerlegung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit in Untermannigfaltigkeiten der Dimension $k < n$.

Lokal sehen Blätterungen aus wie $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Man kann sie deshalb auch lokal als Koordinatensystem auffassen.

Einleitung

Was haben Blätterungen mit Differentialgleichungen zu tun?
Blätterungen sind geometrische Objekte, die man beinahe überall finden kann; so findet man sie auch im Zusammenhang mit Differentialgleichungen.

Ein Beispiel:
Sei

$$\dot{x} = v(x),$$

wobei $v : M \to TM$ ein glattes, nichtsinguläres Vektorfeld auf einer glatten, kompakten Mannigfaltigkeit M sei.
Dann existieren für alle $x_0 \in M$ eindeutige Lösungen $x : \mathbb{R} \to M$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x} = v(x)$. Die Lösungskurven $\{x(t, x_0)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sind eindimensionale Untermannigfaltigkeiten von M und bilden eine disjunkte Zerlegung von M. Die Menge der Lösungskurven bilden eine Blätterung.

Einleitung

Was haben Blätterungen mit Differentialgleichungen zu tun?
Blätterungen sind geometrische Objekte, die man beinahe überall finden kann; so findet man sie auch im Zusammenhang mit Differentialgleichungen.
Ein Beispiel:
Sei
$$\dot{x} = v(x),$$
wobei $v : M \longrightarrow TM$ ein glattes, nichtsinguläres Vektorfeld auf einer glatten, kompakten Mannigfaltigkeit M sei.
Dann existieren für alle $x_0 \in M$ eindeutige Lösungen $x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x} = v(x)$. Die Lösungskurven $\{x(t, x_0)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sind eindimensionale Untermannigfaltigkeiten von M und bilden eine disjunkte Zerlegung von M. Die Menge der Lösungskurven bilden eine Blätterung.

Einleitung

Definiere eine Äquivalenzrelation auf M:

$$\begin{aligned} x_0 \equiv_M y_0 \quad &\Leftrightarrow \quad y_0 \in \{x(t, x_0)\}_{t\in\mathbb{R}} \,. \\ \bigcup_{[x_0]} \{x(t, x_0)\}_{t\in\mathbb{R}} \quad &= \quad M \end{aligned}$$

ist eine Äquivalenzklassenzerlegung von M.

Eine **Blätterung** kann man deshalb auch immer als eine **Zerlegung einer Mannigfaltigkeit in Äquivalenzklassen** auffassen, die immersierte, glatte Mannigfaltigkeiten derselben niedrigeren Dimension bilden.

Einleitung

Idee:

- Blätterung aus **Äquivalenzklassen des asymptotischen Verhaltens von Lösungen**,
- Ausnutzen der geometrischen Eigenschaften der Blätterung für das Verständnis der Dynamik der Systems.

Evolutionsgleichungen

Ich betrachte im Folgenden ausschließlich partielle Differentialgleichungen, die sich als

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \mathcal{F}(u(t))}$$

schreiben lassen.
$\mathcal{F} =$ nichtlinearer Differentialoperator auf einem geeigneten Banachraum X, nicht explizit abhängig von t,
$u(t,x) \in X$ für jedes feste $t \in \mathbb{R}$,
$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Solche partiellen Differentialgleichungen nennt man allgemein **nichtlineare Evolutionsgleichungen**.

Beispiel

Die Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dabei ist $t > 0$, $0 < x < l$, und $u(x,t)$ gibt die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t an.
Randbedingungen: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.
Definiere

$$Af = -K \frac{d^2 f}{dx^2},$$

mit $0 < x < l$, $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ glatt und $f(0) = f(l) = 0$.
Die Wärmegleichung läßt sich dann als

$$\frac{du}{dt} + Au = 0$$

schreiben.

Beispiel

Die Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dabei ist $t > 0$, $0 < x < l$, und $u(x,t)$ gibt die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t an.
Randbedingungen: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.
Definiere

$$Af = -K \frac{d^2 f}{dx^2},$$

mit $0 < x < l$, $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ glatt und $f(0) = f(l) = 0$.
Die Wärmegleichung läßt sich dann als

$$\frac{du}{dt} + Au = 0$$

schreiben.

Ähnlichkeiten zu ODEs

Betrachte die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dt} + Au = 0,$$
$$u(0) = u_0.$$

$A : X \to X$ sektorieller Operator eines Banachraums X,
$t > 0$, $u_0 \in X$.
Diese Gleichung sieht nicht nur so aus, wie eine **lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung**, sondern läßt sich auch ganz analog mit der Exponentialabbildung lösen.
Die Lösung lautet:

$$u(t) = e^{-At} u_0, \quad t \in [0, T].$$

Sie ist zu einem gegebenen Anfangswert eindeutig bestimmt.

Ähnlichkeiten zu ODEs

Betrachte die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

$A : X \to X$ sektorieller Operator eines Banachraums X,
$t > 0$, $u_0 \in X$.
Diese Gleichung sieht nicht nur so aus, wie eine **lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung**, sondern läßt sich auch ganz analog mit der Exponentialabbildung lösen.
Die Lösung lautet:

$$u(t) = e^{-At} u_0, \quad t \in [0, T]\,.$$

Sie ist zu einem gegebenen Anfangswert eindeutig bestimmt.

Ähnlichkeiten zu ODEs

Beispiel:

Betrachte wieder die Wärmegleichung:

$$A = -K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

A läßt sich - wie Matrizen in endlichdimensionalen Vektorräumen - in einem Hilbertraum durch seine positiven Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Eigenfunktionen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darstellen:

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\phi_n, u)\phi_n.$$

Damit läßt sich die Lösung sofort hinschreiben, falls $u(x,0)$ eine glatte Funktion ist:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}(\phi_n(x), u(x,0))\phi_n(x).$$

Ähnlichkeiten zu ODEs

Beispiel:
Betrachte wieder die Wärmegleichung:

$$A = -K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

A läßt sich - wie Matrizen in endlichdimensionalen Vektorräumen - in einem Hilbertraum durch seine positiven Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Eigenfunktionen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darstellen:

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\phi_n, u)\phi_n.$$

Damit läßt sich die Lösung sofort hinschreiben, falls $u(x,0)$ eine glatte Funktion ist:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}(\phi_n(x), u(x,0))\phi_n(x).$$

Ähnlichkeiten zu ODEs

Beachte:

- Die Operatoren müssen **sektoriell** sein $\rightarrow$ Erklärung später.
- Exponentialabbildung läßt sich nicht für alle Operatoren definieren.
- Erst recht besitzen nicht alle Operatoren eine solche Reihendarstellung aus Eigenwerten und Eigenfunktionen wie der eindimensionale Laplace-Operator aus der Wärmegleichung.

Uns interessieren aber auch **nichtlineare** Gleichungen.

Ähnlichkeiten zu ODEs

Betrachte erneut:

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{F}(u(t)) = -Au(t) + R(u(t)).$$

$\mathcal{F}$ kann man in den linearen Operator $-A$ und in R, das alle Nichtlinearitäten enthält, zerlegen.
Wir betrachten also Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= R(u), \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

für $t > t_0$. Auch hier existiert die Analogie zu ODEs noch ein gutes Stück weit:

Ähnlichkeiten zu ODEs

Voraussetzungen:
A sektoriell.
Definiere geeigneten Banachraum X^α mit neuer geeigneter Norm.

$$R : X^\alpha \to X, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

R sei lokal Lipschitz-stetig in x.
Dann gilt:

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)}R(u(s))ds.$$

Unter den obigen Voraussetzungen gibt es ein $T > 0$, so daß eine **eindeutige Lösung** $u(t)$ auf $(t_0, t_0 + T)$ existiert. Die Lösungen der Integralgleichung sind schwache Lösungen.

Unterschiede zu ODEs

- Allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze für PDEs gibt es nicht, sondern immer nur für spezielle Klassen von PDEs.
- Unendlichdimensionale Funktionenräume als Phasenräume.
- Differentialoperatoren sind meistens nicht beschränkte, also nicht stetige Operatoren, die auch nicht überall auf einem geeigneten Funktionenraum definiert sind.
- Die Normen der Funktionenräume spielen eine große Rolle bei Fragen der Konvergenz.

Funktionalanalytische Grundlagen

Die folgenden Überlegungen hängen von den Eigenschaften von

- **unbeschränkten Operatoren**,
- ihrem **Spektrum** und
- den zugehörigen **Funktionenräumen** ab.

Deshalb einige Bemerkungen zu den verwendeten Begriffen:

Funktionenräume

Banachräume sind vollständige, normierte Räume.

- Der Vektorraum $X = C(I)$ der stetigen Funktionen $x : I \to \mathbb{K}$, $I \subset \mathbb{R}$ nichtleeres abgeschlossenes Intervall, mit

$$\|x\|_X = \max_{t \in I} |x(t)|$$

  ist ein Banachraum, ebenso

- der Vektorraum $X = L^p(a, b)$ mit $1 \leq p < \infty$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $x : (a, b) \to \mathbb{K}$, für die $\int_a^b |x(t)|^p \, dt$ existiert, mit

$$\|x\|_X = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

  $L^p(a, b)$ ist erst dann ein Banachraum, wenn zwei Funktionen, die fast überall gleich sind, miteinander identifiziert werden.

Funktionenräume

Banachräume sind vollständige, normierte Räume.

- Der Vektorraum $X = C(I)$ der stetigen Funktionen $x : I \to \mathbb{K}$, $I \subset \mathbb{R}$ nichtleeres abgeschlossenes Intervall, mit

$$\|x\|_X = \max_{t \in I} |x(t)|$$

  ist ein Banachraum, ebenso

- der Vektorraum $X = L^p(a, b)$ mit $1 \leq p < \infty$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $x : (a, b) \to \mathbb{K}$, für die $\int_a^b |x(t)|^p \, dt$ existiert, mit

$$\|x\|_X = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

  $L^p(a, b)$ ist erst dann ein Banachraum, wenn zwei Funktionen, die fast überall gleich sind, miteinander identifiziert werden.

Funktionenräume

Hilberträume sind **Banachräume**, die mit einem **Skalarprodukt** versehen sind.
Hilberträume besitzen eine Orthonormalbasis.

- Ein wichtiges Beispiel sind die Räume

  $$H^k(\Omega, \mathbb{R}) = \left\{ \, f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \quad \middle| \quad D^\alpha f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ für } |\alpha| \leq k \, \right\}$$

  mit der Norm

  $$\|f\| = \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^{k} \left\| f^{(j)}(t) \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

  dabei ist Ω eine meßbare Menge.

Spektrum

Sei $A : X \to X$ ein beschränkter Operator.
Dann heißt

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} \text{ existiert und ist beschränkt.} \right\}$$

die **Resolventenmenge** von A.

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

heißt **Spektrum**.
Für beschränkte Operatoren ist das Spektrum immer nichtleer und kompakt.
Beachte: Das Spektrum enthält - im Unterschied zu Matrizen - nicht nur Eigenwerte, d.h. isolierte Punkte in $\mathbb{C}$. Der Kern von $(\lambda\mathbb{I} - A)$ kann leer sein, und trotzdem existiert keine stetige Inverse.

Unbeschränkte Operatoren

Ein Operator sei im Folgenden eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ mit X, Y Banachräume.

Differentialoperatoren sind normalerweise unbeschränkt und nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert:

Beispiel:

$$A : L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi]),$$
$$A := \frac{d}{dx}.$$

Der Definitionsbereich $D(A)$ von A ist nicht ganz $L^2([-\pi, \pi])$, sondern

$$D(A) := \left\{ f \in L^2([-\pi, \pi]) \quad \middle| \quad \frac{d}{dx} f \in L^2([-\pi, \pi]) \right\}.$$

A ist zudem auf $D(A)$ unbeschränkt, denn

$$\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 1, 2, \dots,$$
$$\|A\phi_n\| = n, \|\phi_n\| = 1.$$

Unbeschränkte Operatoren

Ein Operator sei im Folgenden eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ mit X, Y Banachräume.

Differentialoperatoren sind normalerweise unbeschränkt und nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert:

Beispiel:

$$A : L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi]),$$
$$A := \frac{d}{dx}.$$

Der Definitionsbereich $D(A)$ von A ist nicht ganz $L^2([-\pi, \pi])$, sondern

$$D(A) := \left\{ f \in L^2([-\pi, \pi]) \quad \middle| \quad \frac{d}{dx} f \in L^2([-\pi, \pi]) \right\}.$$

A ist zudem auf $D(A)$ unbeschränkt, denn

$$\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 1, 2, \dots,$$
$$\|A\phi_n\| = n, \|\phi_n\| = 1.$$

Unbeschränkte Operatoren

Ein Operator sei im Folgenden eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ mit X, Y Banachräume.

Differentialoperatoren sind normalerweise unbeschränkt und nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert:

Beispiel:

$$A : L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi]),$$

$$A := \frac{d}{dx}.$$

Der Definitionsbereich $D(A)$ von A ist nicht ganz $L^2([-\pi, \pi])$, sondern

$$D(A) := \left\{ f \in L^2([-\pi, \pi]) \quad \middle| \quad \frac{d}{dx} f \in L^2([-\pi, \pi]) \right\}.$$

A ist zudem auf $D(A)$ unbeschränkt, denn

$$\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 1, 2, \dots,$$

$$\|A\phi_n\| = n, \|\phi_n\| = 1.$$

Abgeschlossene Operatoren

Definition:
Ein Operator $A : H \to H$, H Hilbertraum, heißt **abgeschlossen**, *falls der Graph von A in $H \times H$ abgeschlossen ist, d.h. falls $(x_n) \subset D(A)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ gilt, dann ist $x \in D(A)$ und $Ax = y$.*

Es läßt sich eine neue Norm auf dem Hilbertraum H definieren, so daß ein abgeschlossener Operator beschränkt ist:
Bezüglich dieser Norm ist $A : D(A) \to H$ beschränkt.
Damit sieht man bereits, daß man unbeschränkte, aber abgeschlossene Operatoren wie beschränkte Operatoren behandeln kann, wenn die Norm entsprechend angepaßt wird.

Abgeschlossene Operatoren

Definition:
Ein Operator $A : H \to H$, *H Hilbertraum, heißt* **abgeschlossen**, *falls der Graph von* A *in* $H \times H$ *abgeschlossen ist, d.h. falls* $(x_n) \subset D(A)$ *mit* $x_n \to x$ *und* $Ax_n \to y$ *gilt, dann ist* $x \in D(A)$ *und* $Ax = y$.

Es läßt sich eine neue Norm auf dem Hilbertraum H definieren, so daß ein abgeschlossener Operator beschränkt ist:
Bezüglich dieser Norm ist $A : D(A) \to H$ beschränkt.
Damit sieht man bereits, daß man unbeschränkte, aber abgeschlossene Operatoren wie beschränkte Operatoren behandeln kann, wenn die Norm entsprechend angepaßt wird.

Abgeschlossene Operatoren

Definition:
Ein Operator $A : H \to H$, *H Hilbertraum, heißt* **abgeschlossen**, *falls der Graph von A in $H \times H$ abgeschlossen ist, d.h. falls* $(x_n) \subset D(A)$ *mit* $x_n \to x$ *und* $Ax_n \to y$ *gilt, dann ist* $x \in D(A)$ *und* $Ax = y$.

Es läßt sich eine neue Norm auf dem Hilbertraum H definieren, so daß ein abgeschlossener Operator beschränkt ist:
Bezüglich dieser Norm ist $A : D(A) \to H$ beschränkt.
Damit sieht man bereits, daß man unbeschränkte, aber abgeschlossene Operatoren wie beschränkte Operatoren behandeln kann, wenn die Norm entsprechend angepaßt wird.

Selbstadjungierte Operatoren

Definition:
Ein Operator heißt **selbstadjungiert**, *falls $D(A) \subset H$ dicht und $A^* = A$ und $D(A) = D(A^*)$. Dabei ist A^* die Adjungierte von A.*

Ein selbstadjungierter Operator eines Hilbertraums ist immer dicht definiert, symmetrisch und abgeschlossen.

Er braucht aber nicht stetig zu sein.
Das **Spektrum** eines selbstadjungierten Operators ist **reell**; es kann aber unbeschränkt sein.

Selbstadjungierte Operatoren

Definition:
Ein Operator heißt **selbstadjungiert***, falls* $D(A) \subset H$ *dicht und* $A^* = A$ *und* $D(A) = D(A^*)$*. Dabei ist* A^* *die Adjungierte von* A*.*

Ein selbstadjungierter Operator eines Hilbertraums ist immer dicht definiert, symmetrisch und abgeschlossen.

Er braucht aber nicht stetig zu sein.
Das **Spektrum** eines selbstadjungierten Operators ist **reell**; es kann aber unbeschränkt sein.

Selbstadjungierte Operatoren

Definition:
Ein Operator heißt **selbstadjungiert**, *falls $D(A) \subset H$ dicht und $A^* = A$ und $D(A) = D(A^*)$. Dabei ist A^* die Adjungierte von A.*

Ein selbstadjungierter Operator eines Hilbertraums ist immer dicht definiert, symmetrisch und abgeschlossen.

Er braucht aber nicht stetig zu sein.
Das **Spektrum** eines selbstadjungierten Operators ist **reell**; es kann aber unbeschränkt sein.

Selbstadjungierte Operatoren

Für selbstadjungierte Operatoren auf komplexen Hilberträumen gibt es immer eine **Spektraldarstellung**, d.h. man kann sie mit Hilfe ihres Spektrum darstellen, etwa so, wie wir dies oben bei der Wärmegleichung gesehen haben: Denn

$$A = -K \frac{d^2}{dx^2}$$

ist ein selbstadjungierter, dicht definierter Operator auf $L^2(0, l)$, denn

$$(Af, g) = (f, Ag) \quad \forall f, g \in D(A)$$

und

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(0, l) \quad \middle| \quad Af \in L^2(0, l) \right\}$$

ist dicht in $L^2(0, l)$.

Sektorielle Operatoren

Definition:
Ein Operator $A : H \to H$ heißt **sektoriell**, *falls A abgeschlossen und dicht definiert ist, so daß für ein $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

ist in der Resolventenmenge $\rho(A)$ enthalten und

$$\left\|(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Ist ein Operator selbstadjungiert, dicht definiert und von unten beschränkt, dann ist er sektoriell.

Sektorielle Operatoren

Definition:
Ein Operator $A : H \to H$ *heißt* **sektoriell**, *falls* A *abgeschlossen und dicht definiert ist, so daß für ein* $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

ist in der Resolventenmenge $\rho(A)$ *enthalten und*

$$\left\|(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Ist ein Operator selbstadjungiert, dicht definiert und von unten beschränkt, dann ist er sektoriell.

Halbgruppen

Zur Erinnerung:

Der **Fluß** $\{\phi_t : M \to M\}_{t \geq 0}$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist die Gruppenwirkung von $\mathbb{R}$ auf M. Er ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und ein Homöomorphismus auf M.

Analog kann man die **Lösungshalbgruppe** $\mathbf{e}^{-\mathbf{At}} =: T(t)$ einer linearen partiellen Differentialgleichung als Halbgruppenwirkung von $\mathbb{R}^+$ auf dem Banachraum X auffassen. $T(t)$ ist für $t \geq 0$ ein stetiger linearer Operator.
Ist A sektoriell, dann ist $t \mapsto T(t)x$ reell analytisch für $0 < t < \infty$ und $x \in X$.
Man nennt eine solche Familie $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ eine **analytische Halbgruppe**.

Halbgruppen

Zur Erinnerung:

Der **Fluß** $\{\phi_t : M \to M\}_{t \geq 0}$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist die Gruppenwirkung von $\mathbb{R}$ auf M. Er ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und ein Homöomorphismus auf M.

Analog kann man die **Lösungshalbgruppe $\mathbf{e^{-At}}$** $=: T(t)$ einer linearen partiellen Differentialgleichung als Halbgruppenwirkung von $\mathbb{R}^+$ auf dem Banachraum X auffassen. $T(t)$ ist für $t \geq 0$ ein stetiger linearer Operator.
Ist A sektoriell, dann ist $t \mapsto T(t)x$ reell analytisch für $0 < t < \infty$ und $x \in X$.
Man nennt eine solche Familie $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ eine **analytische Halbgruppe**.

Halbgruppen

Sei $h > 0$, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe. Sei

$$A_h := \frac{T(h)x - x}{h},$$

dann definiert

$$A : D(A) \to X$$
$$Ax := \lim_{h \to 0} A_h x$$

den **infinitesimalen Erzeuger** der Halbgruppe.
Dabei ist $D(A)$ die Menge der $x \in X$, für die der Grenzwert existiert.
$D(A) \subset X$ ist dicht, und A ist ein abgeschlossener Operator auf $D(A)$.

Halbgruppen

Sei $h > 0$, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe. Sei

$$A_h := \frac{T(h)x - x}{h},$$

dann definiert

$$A : D(A) \to X$$
$$Ax := \lim_{h \to 0} A_h x$$

den **infinitesimalen Erzeuger** der Halbgruppe.
Dabei ist $D(A)$ die Menge der $x \in X$, für die der Grenzwert existiert.
$D(A) \subset X$ ist dicht, und A ist ein abgeschlossener Operator auf $D(A)$.

Halbgruppen

Mit diesen Überlegungen läßt sich ein **Dynamisches System als nichtlineare Halbgruppe auf einem Banachraum** definieren:
Sei A sektoriell auf dem Banachraum X, $V \subset X^{\alpha}$ eine offene Teilmenge, $0 \leq \alpha < 1$,
$R : V \rightarrow X$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung.

$$\frac{du}{dt} + Au = R(u), \quad u(0) = u_0$$

besitzt dann nach obigem Satz eine eindeutige Lösung.
Es existiere weiter eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset V$, die positiv invariant ist für das dynamische System. Dann definiert

$$\begin{aligned} S(t) : C &\rightarrow C \\ u_0 &\mapsto u(t, u_0) \end{aligned}$$

für $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ ein dynamisches System auf C.

Halbgruppen

Mit diesen Überlegungen läßt sich ein **Dynamisches System als nichtlineare Halbgruppe auf einem Banachraum** definieren:
Sei A sektoriell auf dem Banachraum X, $V \subset X^{\alpha}$ eine offene Teilmenge, $0 \leq \alpha < 1$,
$R : V \to X$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung.

$$\frac{du}{dt} + Au = R(u), \quad u(0) = u_0$$

besitzt dann nach obigem Satz eine eindeutige Lösung.
Es existiere weiter eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset V$, die positiv invariant ist für das dynamische System. Dann definiert

$$\begin{aligned} S(t) : C &\to C \\ u_0 &\mapsto u(t, u_0) \end{aligned}$$

für $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ ein dynamisches System auf C.

Halbgruppen

Für dieses dynamische System auf einem Banachraum kann man ganz analog zu einem endlichdimensionalen dynamischen System die Begriffe

- **stabil, asymptotisch stabil**
- **Gleichgewichtspunkt,**
- **periodische Lösung etc.**

definieren.
Der Satz von der Existenz **invarianter Mannigfaltigkeiten** gilt hier ebenfalls.
Er wird im Folgenden von Bedeutung sein.

Halbgruppen

Für dieses dynamische System auf einem Banachraum kann man ganz analog zu einem endlichdimensionalen dynamischen System die Begriffe

- **stabil, asymptotisch stabil**
- **Gleichgewichtspunkt,**
- **periodische Lösung etc.**

definieren.
Der Satz von der Existenz **invarianter Mannigfaltigkeiten** gilt hier ebenfalls.
Er wird im Folgenden von Bedeutung sein.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Sei

$$\frac{du}{dt} + Au = R(u),$$

mit A, R wie oben, u_0 ein Gleichgewichtspunkt.
Sei $S(t)$ die Lösungshalbgruppe dieser Gleichung.
Sei

$$\frac{dv}{dt} + Av = d_u R(u_0) v(t)$$

die Linearisierung am Gleichgewichtspunkt.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Sei $L := A - d_u R(u_0)$, und das Spektrum $\sigma(L)$ enthalte nicht die imaginäre Achse.
Zerlege $X = X_1 \oplus X_2$ entsprechend der Spektralmengen $\sigma_1 = \sigma(L) \cap \{\lambda : Re\lambda < 0\}$ und $\sigma_2 = \sigma(L) \setminus \sigma_1$. Seien E_1, E_2 die entsprechenden Spektralprojektionen.

Dann existieren lokal

- **stabile Mannigfaltigkeit** $M_-^{loc}(u_0)$ und
- **instabile Mannigfaltigkeit** $M_+^{loc}(u_0)$.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Zur Erinnerung:
Bei dem bekannten Satz über die Existenz von invarianten Mannigfaltigkeiten bei endlichdimensionalen dynamischen Systemen $f : M \to M$ geht man ebenfalls von einem **hyperbolischen Fixpunkt x** aus.
Der Tangentialraum $T_x M$ an diesem Punkt läßt sich in die verallgemeinerten stabilen und instabilen Eigenräume zerlegen. Diese sind invariant unter der Ableitung df_x.
Man findet Mannigfaltigkeiten, die tangential zu den stabilen bzw. instabilen Eigenräumen sind, dieselbe Dimension wie diese besitzen und die sich in M einbetten lassen.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Zur Erinnerung:
Hat man einen **Anosov**-Diffeomorphismus $f : M \to M$ vor sich, kann man an jeden Punkt $x \in M$ eine lokale instabile und stabile Mannigfaltigkeit $W^u_{loc}(x), W^s_{loc}(x)$ konstruieren. Diese lassen sich zu globalen invarianten Mannigfaltigkeiten fortsetzen:

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}\left(W^s_{loc}\left(f^n(x)\right)\right),$$

$$W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{n}\left(W^u_{loc}\left(f^{-n}(x)\right)\right).$$

Invariante Mannigfaltigkeiten

Ist dies auch für unendlichdimensionale Systeme möglich?

- Die Rückwärtsrichtung $S(-t), t \geq 0$, ist häufig nicht definiert oder nicht injektiv.
- Ist die Dimension bzw. die Kodimension der invarianten Mannigfaltigkeit endlichdimensional sein, so kann man sie zu einer globalen fortsetzen, falls die Lösungsabbildung bestimmte Voraussetzungen erfüllt.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Sei X Banachraum, U offen in X.
Sei $S(1) : U \to X$ die **Zeit-1-Abbildung** von

$$\frac{du}{dt} + Au = R(u(t))$$

und eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung.
Seien $M_-^{loc}(u_0), M_+^{loc}(u_0)$ $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit von U.

- Falls $M_+^{loc}(u_0)$ endlichdimensional ist und negativ invariant, und falls $S(1)$ und $S(1)'(u)$ injektiv für alle

$$u \in M_+(u_0) = \bigcup_{n \geq 0} S(1)^n(M_+^{loc}(u_0))$$

ist, dann ist $M_+(u_0)$ eine injektiv immersierte, invariante $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit mit derselben Dimension wie $M_+^{loc}(u_0)$.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Sei X Banachraum, U offen in X.
Sei $S(1) : U \to X$ die **Zeit-1-Abbildung** von

$$\frac{du}{dt} + Au = R(u(t))$$

und eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung.
Seien $M_-^{loc}(u_0), M_+^{loc}(u_0)$ $\mathcal{C}^r$-Untermannigfaltigkeit von U.

- Falls $M_+^{loc}(u_0)$ endlichdimensional ist und negativ invariant, und falls $S(1)$ und $S(1)'(u)$ injektiv für alle

$$u \in M_+(u_0) = \bigcup_{n \geq 0} S(1)^n(M_+^{loc}(u_0))$$

  ist, dann ist $M_+(u_0)$ eine injektiv immersierte, invariante $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit mit derselben Dimension wie $M_+^{loc}(u_0)$.

Invariante Mannigfaltigkeiten

- Falls M_-^{loc} endliche Kodimension besitzt und positiv invariant ist, und falls $S(1)$ injektiv ist und $S(1)'(u)$ dichten Rang für jedes
$$u \in M_-(u_0) = \bigcup_{n \geq 0} S(1)^{-n}(M_-^{loc}(u_0))$$
besitzt, dann ist $M_-(u_0)$ eine injektiv immersierte, invariante $\mathcal{C}^r$-Mannigfaltigkeit in U mit derselben Kodimension wie $M_-^{loc}(u_0)$.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Bei **Anosov**-Diffeomorphismen ist jeder Punkt hyperbolisch, d.h. die Ableitung besitzt an jedem Punkt keine Eigenwerte mit Betrag 1.

Was bedeutet dies bei unendlichdimensionalen dynamischen Systemen?

Die Linearisierung an jedem Punkt $u(t)$ ist abhängig von t:

$$L(t) = A - d_u R(u(t)).$$

Das Spektrum $\sigma(L(t))$ darf niemals die imaginäre Achse enthalten, und $L(t)$ sollte sektoriell sein. Das bedeutet insbesondere, daß der nichtlineare Rest R sich immer gut verhält und das Spektrum von A bereits eine bestimmte Struktur aufweist.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Was bedeutet das genauer?

Es wird zumeist angenommen, daß A

- selbstadjungiert $\longrightarrow$ reelles Spektrum,
- von unten beschränkt ist $\longrightarrow$ negative Spektralmenge ist eine beschränkte Menge,
- und eine kompakte Resolvente besitzt $\longrightarrow$ Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachtheit $\longrightarrow$ der Eigenraum zur negativen Spektralmenge ist endlichdimensional.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Was bedeutet das genauer?

Es wird zumeist angenommen, daß A

- selbstadjungiert $\longrightarrow$ reelles Spektrum,
- von unten beschränkt ist $\longrightarrow$ negative Spektralmenge ist eine beschränkte Menge,
- und eine kompakte Resolvente besitzt $\longrightarrow$ Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachtheit $\longrightarrow$ der Eigenraum zur negativen Spektralmenge ist endlichdimensional.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Was bedeutet das genauer?

Es wird zumeist angenommen, daß A

- selbstadjungiert $\longrightarrow$ reelles Spektrum,
- von unten beschränkt ist $\longrightarrow$ negative Spektralmenge ist eine beschränkte Menge,
- und eine kompakte Resolvente besitzt $\longrightarrow$ Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachtheit $\longrightarrow$ der Eigenraum zur negativen Spektralmenge ist endlichdimensional.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Was bedeutet das genauer?

Es wird zumeist angenommen, daß A

- selbstadjungiert $\longrightarrow$ reelles Spektrum,
- von unten beschränkt ist $\longrightarrow$ negative Spektralmenge ist eine beschränkte Menge,
- und eine kompakte Resolvente besitzt $\longrightarrow$ Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachtheit $\longrightarrow$ der Eigenraum zur negativen Spektralmenge ist endlichdimensional.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Was bedeutet das genauer?

Es wird zumeist angenommen, daß A

- selbstadjungiert $\longrightarrow$ reelles Spektrum,
- von unten beschränkt ist $\longrightarrow$ negative Spektralmenge ist eine beschränkte Menge,
- und eine kompakte Resolvente besitzt $\longrightarrow$ Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachtheit $\longrightarrow$ der Eigenraum zur negativen Spektralmenge ist endlichdimensional.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Was bedeutet das genauer?

Es wird zumeist angenommen, daß A

- selbstadjungiert $\longrightarrow$ reelles Spektrum,
- von unten beschränkt ist $\longrightarrow$ negative Spektralmenge ist eine beschränkte Menge,
- und eine kompakte Resolvente besitzt $\longrightarrow$ Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachtheit $\longrightarrow$ der Eigenraum zur negativen Spektralmenge ist endlichdimensional.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Sei $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die monoton wachsende Folge aus Eigenwerten von A. Erfüllt $R(u)$ geeignete Voraussetzungen und wird die Lücke zwischen zwei aufeinanderfolgende Eigenwerten immer größer, je größer die Eigenwerte sind,

$$\limsup_{m\to\infty}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)=\infty.$$

dann ist „Platz“ für eine globale invariante Mannigfaltigkeit, die **Inertialmannigfaltigkeit**, die alle instabilen Mannigfaltigkeiten enthält.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Zusammenfassung: Die Voraussetzungen an die partiellen Differentialgleichungen, die nötig sind, um auf die Existenz von invarianten Mannigfaltigkeiten schließen zu können, sind also sehr restriktiv.

Was hat das alles mit Blätterungen zu tun?
Blätterungen sind Zerlegungen einer Mannigfaltigkeit in Untermannigfaltigkeiten.
Damit sie etwas mit einem dynamischen System zu tun haben können, müssen diese Untermannigfaltigkeiten bzw. die große Mannigfaltigkeit **invariant** sein.
Damit sie etwas über die Dynamik des Systems aussagen können, sollten sie bestimmte asymptotische Eigenschaften des Systems widerspiegeln.
Deshalb bieten sich **stabile und instabile Mannigfaltigkeiten als Blätterungen** an.
Bei Anosov-Diffeomorphismen bilden sowohl die stabilen als auch die instabilen Mannigfaltigkeiten Blätterungen.
Inwieweit findet sich Ähnliches auch bei den von mir betrachteten PDEs?

Blätterungen: eine kleine Einleitung

Was sind Blätterungen jetzt genau?

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Eine Blätterung ist eine Äquivalenzklassenzerlegung der Mannigfaltigkeit, so daß jede Äquivalenzklasse eine zusammenhängende immersierte Mannigfaltigkeit der Dimension $k < n$ ist.

Wichtig:
Die Blätterung ist lokal homöomorph zu offenen Umgebungen in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.
Es ist aber möglich, das Konzept der Blätterung so zu erweitern, daß anstelle von $\mathbb{R}^{n-k}$ ein beliebiger lokal kompakter, metrischer Raum gewählt wird. Dies wird im Folgenden der Fall sein, da Funktionenräume geblättert werden.

Beispiele

- Sei $f : M \to N$ eine glatte Submersion von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in eine q-dimensionale Mannigfaltigkeit N. Für jedes $y \in M$ gibt es eine Koordinatenumgebung $U \subset M$ und eine Koordinatenumgebung $V \subset N$ von $f(y) \in N$, so daß

$$f(y_1, \ldots, y_n)|_U = (y_1, \ldots, y_q)$$

gilt.
Die Niveaumengen $f^{-1}(x)$ sind damit eingebettete Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $k = n - q$. Die Zusammenhangskomponenten der nichtleeren Niveaumengen von f sind die Blätter einer Blätterung $\mathcal{B}$ der Kodimension q.

Vektorfeld

- Sei $v : M \to TM$ ein nichtsinguläres Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Dann definiert der Fluß eine Blätterung der Dimension 1.
  Sei $x \in M$ beliebig, da v nichtsingulär ist (Rektifizierungssatz), gibt es eine Koordinatenumgebung $(U, x_1, \ldots, x_n)$ von x, so daß
  $$\frac{\partial x}{\partial x_1} = v|_U$$
  gilt. Jede Lösungskurve ist ein Blatt der Blätterung.

Vektorfeld

- Sei $v : M \to TM$ ein nichtsinguläres Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Dann definiert der Fluß eine Blätterung der Dimension 1.
  Sei $x \in M$ beliebig, da v nichtsingulär ist (Rektifizierungssatz), gibt es eine Koordinatenumgebung $(U, x_1, \ldots, x_n)$ von x, so daß
  $$\frac{\partial x}{\partial x_1} = v|_U$$
  gilt. Jede Lösungskurve ist ein Blatt der Blätterung.

Torus

- Ein weiteres, aus den dynamischen Systemen bekanntes Beispiel ist eine Blätterung auf dem Torus $\mathbb{T}^2$. Sei

$$v \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{T}^2$.
Jedes Blatt der Blätterung $\mathcal{F}$ hat die Form

$$L = \{[x_0 + ta, y_0 + tb]\}_{t \in \mathbb{R}} .$$

Ist $\frac{b}{a}$ rational, dann ist L ein in $\mathbb{T}^2$ eingebetteter Kreis.
Ist $\frac{b}{a}$ irrational, dann ist jedes L eine Immersion des $\mathbb{R}$ in den Torus und ist überall dicht in $\mathbb{T}^2$.

Holonomie

Die Dynamik von Blätterungen wird vor allem mit Hilfe der **Holonomie** einer Blätterung beschrieben.

Holonomie kann man als eine **verallgemeinerte Poincaré-Abbildung** verstehen.

Man betrachtet dazu einen geschlossenen Weg auf einem Blatt der Blätterung. Was passiert mit den Blättern in der Umgebung, wenn man diesen Weg entlang geht? Nähern sich immer mehr Blätter dem Blatt asymptotisch an oder bewegen sie sich weg?

Die **totale Holonomie-Gruppe** ist die Gruppe der Diffeomorphismen, die einen transversalen Schnitt an $x \in L$, L Blatt der Blätterung, wieder auf sich abbilden, entlang eines geschlossenen Weges im Blatt.

Besondere Mengen

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine Blätterung über M.
$X \subset M$ heißt $\mathcal{F}$-**gesättigt**, falls es eine Vereinigung von Blättern von $\mathcal{F}$ ist.

Eine **minimale** Menge $X \subset M$ ist eine abgeschlossene, nichtleere und $\mathcal{F}$-gesättigte Teilmenge, die keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften besitzt.

Ein abgeschlossenes Blatt ist immer eine minimale Menge.
Besitzt eine Blätterung über M nur Blätter, die dicht in M sind, dann ist M die einzige minimale Menge.

Eine minimale Menge $X \subset M$ heißt **außergewöhnlich**, falls X weder ein einzelnes abgeschlossenes Blatt ist noch eine Zusammenhangskomponente von M.

Besondere Mengen

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine Blätterung über M.
$X \subset M$ heißt $\mathcal{F}$-**gesättigt**, falls es eine Vereinigung von Blättern von $\mathcal{F}$ ist.

Eine **minimale** Menge $X \subset M$ ist eine abgeschlossene, nichtleere und $\mathcal{F}$-gesättigte Teilmenge, die keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften besitzt.

Ein abgeschlossenes Blatt ist immer eine minimale Menge.
Besitzt eine Blätterung über M nur Blätter, die dicht in M sind, dann ist M die einzige minimale Menge.

Eine minimale Menge $X \subset M$ heißt **außergewöhnlich**, falls X weder ein einzelnes abgeschlossenes Blatt ist noch eine Zusammenhangskomponente von M.

Besondere Mengen

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine Blätterung über M.
$X \subset M$ heißt $\mathcal{F}$-**gesättigt**, falls es eine Vereinigung von Blättern von $\mathcal{F}$ ist.

Eine **minimale** Menge $X \subset M$ ist eine abgeschlossene, nichtleere und $\mathcal{F}$-gesättigte Teilmenge, die keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften besitzt.

Ein abgeschlossenes Blatt ist immer eine minimale Menge.
Besitzt eine Blätterung über M nur Blätter, die dicht in M sind, dann ist M die einzige minimale Menge.

Eine minimale Menge $X \subset M$ heißt **außergewöhnlich**, falls X weder ein einzelnes abgeschlossenes Blatt ist noch eine Zusammenhangskomponente von M.

Besondere Mengen

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine Blätterung über M.
$X \subset M$ heißt $\mathcal{F}$-**gesättigt**, falls es eine Vereinigung von Blättern von $\mathcal{F}$ ist.

Eine **minimale** Menge $X \subset M$ ist eine abgeschlossene, nichtleere und $\mathcal{F}$-gesättigte Teilmenge, die keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften besitzt.

Ein abgeschlossenes Blatt ist immer eine minimale Menge.
Besitzt eine Blätterung über M nur Blätter, die dicht in M sind, dann ist M die einzige minimale Menge.

Eine minimale Menge $X \subset M$ heißt **außergewöhnlich**, falls X weder ein einzelnes abgeschlossenes Blatt ist noch eine Zusammenhangskomponente von M.

Beispiel

Die globalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines **Anosov-Diffeomorphismus** $f : M \to M$ bilden zwei Blätterungen auf M.

Sind die periodischen Punkte von f dicht in den nichtwandernden Punkten von f, dann gilt nach einem bekannten Satz, daß $W^s(x)$ und $W^u(x)$ für alle $x \in M$ dicht in M sind, d.h. bei beiden Blätterungen ist M die einzige minimale Menge. Solche Blätterungen nennt man **minimal**.

Beispiel

Zur Erinnerung:
Bei den Kreisabbildungen mit irrationaler Rotationszahl tauchte das **Denjoy-Beispiel** auf. Zu jeder irrationalen Rotationszahl läßt sich ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $f : S^1 \to S^1$ konstruieren, der nicht zu einer irrationalen Rotation konjugiert ist, d.h. die ω-Limesmenge jedes Punktes ist homöomorph zu einer Cantormenge.
Betrachte nun die Suspension über S^1. Sie gibt eine $\mathcal{C}^1$-Blätterung von $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$. Diese Blätterung besitzt eine minimale Menge X, die der Cantormenge entspricht, die weder ein abgeschlossenes Blatt noch irgendwo dicht in $\mathbb{T}^2$ ist. X ist die einzige minimale Menge und eine außergewöhnliche Menge.

Blätterungen als Dynamische Systeme

Blätterungen können zusammen mit ihrer Holonomie-Gruppe als **Verallgemeinerungen von Dynamischen Systemen** betrachtet werden.

Auch für sie läßt sich eine **Entropie** definieren. Entropie mißt die Rate, mit der Orbits einer Abbildung divergieren.
Die **topologische Entropie** läßt sich auf Holonomie-Pseudogruppen verallgemeinern, in strenger Analogie zur topologischen Entropie von Abbildungen.
Weiter wird der Begriff der **geometrischen Entropie** eingeführt, da es keine kanonische Wahl einer Holonomie-Pseudogruppe gibt.
Die geometrische Entropie mißt die Art, mit der Blätter sich in verschiedene Richtungen „wegschälen".

Blätterungen im Zusammenhang mit PDEs

Oben wurde bereits dargestellt, wann an einen hyperbolischen Fixpunkt einer Lösungshalbgruppe stabile und instabile Mannigfaltigkeiten existieren.
Über die instabile Mannigfaltigkeit läßt sich eine Blätterung definieren, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
Sei X ein Banachraum,
$S(t) : X \to X$ eine (Lösungs-)Halbgruppe für $t \geq 0$, und sei 0 ein Gleichgewichtspunkt.
Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt (verkürzt zitiert):

Blätterungen im Zusammenhang mit PDEs

Oben wurde bereits dargestellt, wann an einen hyperbolischen Fixpunkt einer Lösungshalbgruppe stabile und instabile Mannigfaltigkeiten existieren.
Über die instabile Mannigfaltigkeit läßt sich eine Blätterung definieren, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
Sei X ein Banachraum,
$S(t) : X \to X$ eine (Lösungs-)Halbgruppe für $t \geq 0$, und sei 0 ein Gleichgewichtspunkt.
Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt (verkürzt zitiert):

1. $S(t)$ sei stetig in $(t, u) \in \mathbb{R}^{+} \times X$ und erfülle eine Lipschitz-Bedingung.
2. Für ein τ lasse sich $S(\tau)$ geeignet linearisieren.
3. Es gebe eine unter der Linearisierung L invariante Zerlegung $X = X_{+} \oplus X_{-}$ mit X_{+} endlichdimensional. Auf den Unterräumen ist L expandierend bzw. kontrahierend.

Dann gibt es

1. eine instabile Mannigfaltigkeit $M_+(0)$, die sich als Graph einer Lipschitz-Abbildung darstellen läßt, und
2. Es gibt eine Blätterung $\{M_x\}$ über die instabile Mannigfaltigkeit $M_+(0)$, so daß $S_t(M_x) \subset M_{S(t)(x)}, n \geq 0$. Jedes M_x ist Graph einer stetigen Abbildung.
3. M_0 ist dabei stabile Mannigfaltigkeit an 0.
4. Für alle $\xi \in X$ gilt: $M_\xi \cap M_-(0)$ besteht aus genau einem Punkt und

$$M_x \cap M_y = \emptyset \text{ für } x \neq y \text{ und } \bigcup_{x \in M_+(0)} M_x = X.$$

Dann gibt es

1. eine instabile Mannigfaltigkeit $M_+(0)$, die sich als Graph einer Lipschitz-Abbildung darstellen läßt, und
2. Es gibt eine Blätterung $\{M_x\}$ über die instabile Mannigfaltigkeit $M_+(0)$, so daß $S_t(M_x) \subset M_{S(t)(x)}, n \geq 0$. Jedes M_x ist Graph einer stetigen Abbildung.
3. M_0 ist dabei stabile Mannigfaltigkeit an 0.
4. Für alle $\xi \in X$ gilt: $M_\xi \cap M_-(0)$ besteht aus genau einem Punkt und

$$M_x \cap M_y = \emptyset \text{ für } x \neq y \text{ und } \bigcup_{x \in M_+(0)} M_x = X.$$

Dann gibt es

1. eine instabile Mannigfaltigkeit $M_+(0)$, die sich als Graph einer Lipschitz-Abbildung darstellen läßt, und
2. Es gibt eine Blätterung $\{M_x\}$ über die instabile Mannigfaltigkeit $M_+(0)$, so daß $S_t(M_x) \subset M_{S(t)(x)}, n \geq 0$. Jedes M_x ist Graph einer stetigen Abbildung.
3. M_0 ist dabei stabile Mannigfaltigkeit an 0.
4. Für alle $\xi \in X$ gilt: $M_\xi \cap M_-(0)$ besteht aus genau einem Punkt und

$$M_x \cap M_y = \emptyset \text{ für } x \neq y \text{ und } \bigcup_{x \in M_+(0)} M_x = X.$$

Es gibt also eine $S(t)$-**invariante Blätterung von** X **über die instabile Mannigfaltigkeit** $M_+(0)$.
$M_+(0)$ ist eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit, da X_+ nach Voraussetzung endlichdimensional ist.

Jedes Blatt ist $\mathcal{C}^1$, weil M_x für jedes $x \in M_+(0)$ eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, falls $S(t)$ stetig differenzierbar ist. Die Blätterung ist ebenfalls $\mathcal{C}^1$, denn sie „erbt" den Blätterungsatlas von den stetig differenzierbaren Atlanten von $M_+(0)$ und $\{M_x\}$.

Es gibt also eine $S(t)$-**invariante Blätterung von** X **über die instabile Mannigfaltigkeit** $M_+(0)$.
$M_+(0)$ ist eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit, da X_+ nach Voraussetzung endlichdimensional ist.

Jedes Blatt ist $\mathcal{C}^1$, weil M_x für jedes $x \in M_+(0)$ eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, falls $S(t)$ stetig differenzierbar ist. Die Blätterung ist ebenfalls $\mathcal{C}^1$, denn sie „erbt" den Blätterungsatlas von den stetig differenzierbaren Atlanten von $M_+(0)$ und $\{M_x\}$.

Inertialmannigfaltigkeit

Sei durch

$$\begin{aligned} S_t : X &\rightarrow X \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

ein dynamisches System auf einem Hilbertraum X definiert.
S sei stetig in $(t, u_0) \in \mathbb{R}^+ \times X$ und in $u_0 \in X$ stetig differenzierbar.
Die zugrundeliegende partielle Differentialgleichung sei **dissipativ**, d.h.

1. $\lim_{t \to 0} S_t u_0 = u_0 \in X$,
2. Es gibt ein Y kompakt in X, konvex und absorbierend, d.h. zu jeder beschränkten Menge $F \subset X$ gibt es ein $t_0 = t_0(F)$, so daß $S_t u_0 \in Y$ für alle $t \geq t_0$, $u_0 \in F$.

Inertialmannigfaltigkeit

Sei durch

$$\begin{aligned} S_t : X &\to X \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

ein dynamisches System auf einem Hilbertraum X definiert.
S sei stetig in $(t, u_0) \in \mathbb{R}^+ \times X$ und in $u_0 \in X$ stetig differenzierbar.
Die zugrundeliegende partielle Differentialgleichung sei **dissipativ**, d.h.

1. $\lim_{t\to 0} S_t u_0 = u_0 \in X$,
2. Es gibt ein Y kompakt in X, konvex und absorbierend, d.h. zu jeder beschränkten Menge $F \subset X$ gibt es ein $t_0 = t_0(F)$, so daß $S_t u_0 \in Y$ für alle $t \geq t_0$, $u_0 \in F$.

Inertialmannigfaltigkeit

Es existiere weiter eine **Inertialmannigfaltigkeit** $\mathcal{M}$, d.h. eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit in X, für die gilt:

$$S_t\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \forall t \geq 0,$$

$\mathcal{M}$ sei kompakt und zusammenhängend und $\mathcal{C}^2$.

Sie enthält insbesondere den globalen Attraktor der partiellen Differentialgleichung und zieht alle Orbits exponentiell an. Voraussetzung für ihre Existenz ist eine bestimmte Struktur des Spektrums des linearen Anteils A von $\mathcal{F} = A + R$. Das Spektrum muß aus isolierten Punkten bestehen, deren Abstände zueinander desto größer werden, je größer ihr Betrag ist.

Inertialmannigfaltigkeit

Weiter nehme ich an, daß $\mathcal{M}$ **normal hyperbolisch** ist, d.h. es existiert eine dS_t-invariante Zerlegung des Tangentialbündels über $\mathcal{M}$

$$T_m X = X_m^s \oplus X_m^u \oplus T_m \mathcal{M}, \forall m \in \mathcal{M},$$

so daß

$$\begin{aligned} dS_t X_m^s &\subset X_{S_t m}^s \\ dS_t X_m^u &\subset X_{S_t m}^u \\ dS_t(T_m \mathcal{M}) &\subset T_{S_t m} \mathcal{M}, \end{aligned}$$

und dS_t eingeschränkt auf X^u expandiert zu einem stärkeren Grad als dS_t entlang $T\mathcal{M}$, sowie dS_t eingeschränkt auf X^s kontrahiert zu einem stärkeren Grad als dS_t entlang $T\mathcal{M}$.

Inertialmannigfaltigkeit

Die normale Hyperbolizität ist keine starke Forderung. In den meisten Fällen ist die Inertialmannigfaltigkeit, wenn sie denn existiert, auch normal hyperbolisch. Dies folgt unmittelbar aus der Struktur des Spektrums.

Inertialmannigfaltigkeit

Man kann zeigen, daß in einer ϵ-Umgebung $\theta(\epsilon)$ der Inertialmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ eine eindeutige $\mathcal{C}^1$- **zentrumstabile Mannigfaltigkeit** $W^{cs}(\epsilon)$ und eine $\mathcal{C}^1$-**zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit** $W^{cu}(\epsilon)$ für S_t existiert, so dasß

$$\mathcal{M} = W^{cs}(\epsilon) \cap W^{cu}(\epsilon),$$

und

$$\forall m \in M : T_m W^{cs}(\epsilon) = X_m^s \oplus T_m \mathcal{M}.$$

.

Inertialmannigfaltigkeit

$W^{cs}(\epsilon), W^{cu}(\epsilon)$ sind invariant unter S_{t_1} und bestimmen das asymptotische Verhalten des Halbflusses S_t in $\theta(\epsilon)$.

Für jeden Punkt $x \in W^{cs}(\epsilon)$ gibt es ein $m \in \mathcal{M}$, so daß $S_t x$ und $S_t m$ daßelbe asymptotische Verhalten besitzen.

Demnach kann die zentrumstabile Mannigfaltigkeit in disjunkte Untermannigfaltigkeiten entsprechend des asymptotischen Verhaltens zerlegt werden. Es läßt sich also eine Blätterung auf ihr definieren. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes:

Inertialmannigfaltigkeit

Zu einem $\epsilon > 0$ klein gibt es eine eindeutige Familie von $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeiten $\{W_m^{ss}(\epsilon) : m \in \mathcal{M}\}$, die eine **Blätterung von $\mathbf{W}^{\mathbf{cs}}(\epsilon)$** bilden, so daß

$$\forall m \in \mathcal{M} : \; T_m W_m^{ss}(\epsilon) = E_m^s,$$

und für $x, y \in W_m^{ss}(\epsilon)$:

$$|S_t x - S_t y| \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

Inertialmannigfaltigkeit

$\{W_m^{ss}(\epsilon)\}$ bilden eine **invariante stabile Blätterung** auf $W^{cs}(\epsilon)$.

Ein analoger Satz läßt sich für die zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit zeigen. Es läßt sich weiter zeigen, daß ein $\epsilon_1 > 0$ existiert, so daß für alle $\epsilon < \epsilon_1$ die Blätterung eindeutig als Graph einer Lipschitzstetigen Funktion dargestellt werden kann und S_t-invariant ist. Die stabile Blätterung ist $\mathcal{C}^1$.

Beispiel

Sei

$$u_t = \nu \Delta u + f(x, u)$$

eine **Reaktion-Diffusionsgleichung** mit den gängigen Randbedingungen auf $\Omega_n = (0, 2\pi)^n \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^d$.

Dann besitzt die Gleichung für jedes $\nu > 0$ eine **Inertialmannigfaltigkeit**, falls $n = 1, 2, 3$.
Außerdem ist die Inertialmannigfaltigkeit **normal hyperbolisch**.

Zusammenfassung

Warum so kompliziert?
Idee:
Äquivalenz zwischen der **Existenz bestimmter geometrischer Strukturen der Mannigfaltigkeit** d.h. der Blätterung und dem **dynamischen Verhalten einer partiellen Differentialgleichung**.
Beispielsweise ist die Frage, ob es eine glatte eindimensionale Blätterung auf einer zweidimensionalen Sphäre gibt, gleichbedeutend mit der Frage, ob es ein nichtsinguläres Vektorfeld auf der Sphäre gibt.

Zusammenfassung

Es stellt sich die Frage, ob man **das dynamische Verhalten von Blätterungen**, d.h. Entropie, Wachstum von Blättern und Existenz besonderer Strukturen in der Blätterung, direkt mit dem **dynamischen Verhalten einer partiellen Differentialgleichung** in Verbindung setzen kann.

- Wie kann man der **Holonomie-Gruppe** eine konkrete Bedeutung in Bezug auf PDEs verleihen?
- Existenz minimaler oder **außergewöhnlicher Blätter** $\longrightarrow$ Chaos?
- Kann man die **Entropie** einer Blätterung mit der Dynamik der PDE verbinden?

Beschreibt man die globalen stabilen Mannigfaltigkeiten als Blätter einer Blätterung, kann man durch Untersuchung der Blätterung verstehen, wie sie im Raum liegen und was sie mit lokal transversalen Schnitten, den instabilen Mannigfaltigkeiten, machen.