

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:

Zeigen Sie folgende Aussagen über die Matrixexponentialfunktion:

a) Für jede reelle $n \times n$ -Matrix A gilt:

$$\det E(A, t) = e^{t \operatorname{Spur}(A)}.$$

b) Für A^T (die transponierte Matrix) gilt:

$$E(A^T, t) = (E(A, t))^T.$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie: Die Matrixexponentialfunktion bildet schiefssymmetrische Matrizen auf orthogonale Matrizen ab. D.h.: Wenn $A^T = -A$ gilt, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $B = E(A, t)$ die Beziehung

$$B^T = B^{-1}$$

erfüllt. Tipp: Berechnen Sie $E(A + A^T, t)$.

b) Zeigen Sie: Wenn A schiefssymmetrisch ist, dann ist $\det(E(A, t)) = +1$.

Aufgabe 3:

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = y + z$$

$$\dot{y} = x + z$$

$$\dot{z} = x + y$$

mit Anfangsdaten $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$.

b) Analysieren Sie die Ruhelage $x = y = z = 0$ auf Stabilität und auf asymptotische Stabilität.

Aufgabe 4:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} u.$$

Skizzieren Sie ein Phasenportrait.

b) Finden Sie alle Ruhelagen und untersuchen Sie diese auf Stabilität und auf asymptotische Stabilität.

Abgabe: 23.5.2006 in der Vorlesung