

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2 - t^2, \quad y(0) = 1$$

durch formalen Potenzreihenansatz

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.$$

D.h. setzen Sie die formale Potenzreihe in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie die a_i durch Koeffizientenvergleich.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie per Induktion: $|a_i| \leq 1$ für alle i . Schließen Sie daraus, dass Ihre formale Potenzreihenlösung eine wirkliche Lösung für $t \in (-1, 1)$ ist.

Aufgabe 3:

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Das Euler-Verfahren bei einer Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y)$$

liefert korrekte Werte für alle Schrittweiten $\varepsilon > 0$ dann und nur dann, wenn f konstant ist. Hierbei heißen die Werte korrekt, wenn zu gegebenen Anfangsdaten (t_0, y_0) alle mit dem Euler-Verfahren iterierten Punkte auf der echten Lösung des Anfangswertproblems liegen. Machen Sie dabei die (unrealistische) Annahme, dass der Computer keine Rundungsfehler macht.

Aufgabe 4:

Finden Sie irgendeine Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y),$$

wobei f nicht konstant ist, irgendeine Schrittweite $\varepsilon > 0$ und irgendwelche Anfangsdaten (t_0, y_0) , so dass das Euler-Verfahren korrekte Werte liefert.

Abgabe: 25.4.2006 in der Vorlesung