Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie die Beziehungen zwischen **Hamilton-Systemen**

$$\dot{x} = J\nabla H(x)$$

und **Gradientensystemen**

$$\dot{x} = \nabla G(x)$$

auf dem $\mathbb{R}^{2n}$:

a) Kann ein Hamilton-System, welches ein aus mehr als einem Punkt bestehenden periodisches Orbit besitzt, auch ein Gradientensystem sein?
D.h. wenn es eine reellwertige Funktion H auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ gibt mit $\dot{x} = J\nabla H$ für alle $x \in U$, wobei die Matrix J so ist wie auf Aufgabenblatt 9, und $p \in U$ periodisch ist mit $J\nabla H(p) \neq 0$, kann es dann eine Funktion $G : U \to \mathbb{R}$ geben mit $J\nabla H = \nabla G$?

b) Kann ein Gradientensystem mit einem lokalen Extremum ein Hamilton-System sein?

c) Gibt es überhaupt eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, die sowohl ein Hamilton-System als auch ein Gradientensystem ist?

Aufgabe 2:
Sei u_0 ein stabiler Fixpunkt des Gradientensystems $\dot{u} = \nabla G(u)$, welches auf einem Gebiet U im $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Konstruieren Sie eine **Lyapunov-Funktion** zu u_0, welche auf ganz U definiert ist.

Aufgabe 3:
Das Hamilton-System $\dot{x} = J\nabla H(x)$ habe eine Ruhelage u_0, und $dH|_{u_0}$ habe den Eigenwert $-2006 + 11.7 \cdot i$. Zeigen Sie: u_0 ist nicht stabil.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Für jedes Paar von verschiedenen Punkten $p \neq q$ auf dem 2-dimensionalen Torus $\mathbb{T}$ gibt es ein System

$$\dot{u} = f(u),$$

so dass fast alle Punkte auf einem **heteroklinen Orbit** liegen, welches p mit q verbindet.
D.h., wenn μ das Volumen (Lebesgue-Maß) auf $\mathbb{T}$ ist, dann soll gelten:

$$\mu(\{x \in \mathbb{T} : \alpha(x) = p,\ \omega(x) = q\}) = \mu(\mathbb{T}).$$

Tipps: Der Torus läßt sich auf bekannte Weise in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Sie können folgenden Satz verwenden: Für alle $p' \neq q'$ auf $\mathbb{T}$ gibt es einen volumenerhaltenden Diffeomorphismus $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ mit $F(p) = p'$ und $F(q) = q'$.

Abgabe: 11.7.2006 in der Vorlesung. Viel Spaß in der vorlesungsfreien Zeit!