Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1:
Wenn

$$\dot{u} = Au$$

ein lineares Hamilton-System auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ ist, dann heißt die Matrix A **symplektisch**. Es gilt dann:

$$A^T J A = J$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei 0 und 1 jeweils $n \times n$-Matrizen sind.

Zeigen Sie: Eine symplektische Matrix hat Determinante +1.

Lösung:
Wegen der symplektischen Gleichung gilt

$$\det\left(A^T\right)\det(J)\det(A) = \det(J),$$

also

$$\det(A) = \pm 1.$$

Insbesondere ist A invertierbar und hat keinen Eigenwert 0, was wir bei Aufgabe 2 noch verwenden werden.

Wegen Aufgabe 2 treten die Eigenwerte in Quadrupeln auf. Hierbei gibt es 4 Arten von Quadrupeln:

- "echte" Quadrupel:
  $$\lambda, \bar{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$$
  sind alle verschieden. Dann liegt keiner dieser Zahlen auf der reellen Achse oder auf dem Einheitskreis. Jede dieser Zahlen hat Vielfachheit 1.
- Paar-"Quadrupel", die aus 2 verschiedenen reellen Zahlen bestehen, jeder mit Vielfachheit 2. Da sie verschieden sind, liegt keiner auf dem Einheitskreis.
- Paar-"Quadrupel", die ein Paar komplex konjugierter, nicht-reeller Zahlen auf dem Einheitskreis sind, jeweils mit Vielfachheit 2.
- einpunktige "Quadrupel", welche aus der Zahl 1 bestehen, und zwar mit Vielfachheit 4.

Für jeden dieser Arten von Quadrupeln gilt: Das Produkt der Einträge ist 1, also $\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}} = 1$.

Natürlich kann so ein λ-Quadrupel mehrfach vorkommen; dann werden die erwähnten Vielfachheiten in dem Quadrupel alle mit demselben Faktor multipliziert.

Wenn wir die Matrix A also in Jordan-Normalform schreiben, sehen wir: Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also auch 1. □

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Die Eigenwerte einer symplektischen Matrix treten in Quadrupeln auf. D.h., wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert ist, dann sind auch

$$\bar{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

Eigenwerte.

Lösung:
Wegen $A^{\mathrm{T}} J A = J \Leftrightarrow J^{-1} A^{\mathrm{T}} J = A^{-1}$ und $J^{-1} = -J$ gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \det\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda E\right) \\
&= \det\left(J\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda E\right) J^{-1}\right) \\
&= \det\left(-J A^{\mathrm{T}} J + \lambda J E J\right) \\
&= \det\left(A^{-1} - \lambda E\right).
\end{aligned}$$

Es gilt also: Das charakteristische Polynom zu A ist identisch mit dem zu A^{-1}. Also sind auch die Nullstellen dieselben, und insbesondere – dies ist besonders wichtig – mit derselben Vielfachheit. Also ist für jeden Eigenwert λ von A λ auch ein Eigenwert zu A^{-1}.

Wegen

$$A^{-1} v = \lambda v$$

gilt natürlich

$$v = \frac{1}{\lambda} A v$$

bzw.

$$A v = \frac{1}{\lambda} v.$$

Also ist zu jedem λ auch $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A, und zwar mit derselben Vielfachheit.

Dass die Eigenwerte einer reellen Matrix spiegelsymmetrisch zur reellen Achse liegen, ist uns bereits aus linearer Algebra bekannt: $A = \bar{A}$, und deshalb gilt: $0 = \det(A - \lambda E)$ impliziert

$$0 = \bar{0} = \overline{\det(A - \lambda E)} = \det\left(A - \bar{\lambda} E\right).$$

D.h., wenn λ ein Eigenwert ist, so auch $\bar{\lambda}$, und zwar wieder mit derselben Vielfachheit. □

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Für jedes System

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(y) \\
\dot{y} &= g(x)
\end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ und mit Lipschitz-stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist der Lösungsfluss volumenerhaltend.

Tipp: Benutzen Sie die Methode aus dem Beweis der Volumenerhaltung von Hamilton-Systemen.

Lösung:
Kurze Lösung: div $= 0$. $\square$

Ausführliche Lösung: Es gilt für ein Gebiet A die Formel

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\text{vol}\left(\varphi_t\left(A\right)\right) = \int_A \text{div}F\, d\text{vol},$$

wobei φ der Lösungsfluss zu $\dot{u} = F(u)$ ist; hier also

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{div}F &:= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f(y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\text{vol}\left(\varphi_t\left(A\right)\right) = 0,$$

und somit ist

$$\text{vol}\left(\varphi_t\left(A\right)\right)$$

konstant in t. $\square$

Aufgabe 4:
Gibt es eine Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$, so dass die ω-Limesmenge $\omega(p)$ ein periodisches Orbit P enthält und so dass $\omega(q)$ je einen Punkt im Inneren und im Äußeren des von P berandeten Gebiets enthält, aber nicht P enthält? (Beispiel oder Gegenbeweis)

Lösung:
Wir wissen aus der Vorlesung: $\omega(q)$ ist zusammenhängend.

Zur Erinnerung: Eine Menge M im $\mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, wenn es keine nichtleeren Mengen $A, B \subset M$ gibt mit $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$, so dass A, B relativ offen in M sind. Hierbei heißt eine Menge A **relativ offen in** M, wenn $A = A' \cap M$ ist mit einer Menge A', die im $\mathbb{R}^n$ offen ist.

Wähle

$$A' = G_{\text{a}} \text{ und } B' = G_{\text{i}}\,.$$

Dann ist

$$\omega(q) = \left(A' \cap \omega\left(q\right)\right) \cup \left(B' \cap \omega\left(q\right)\right)$$

(denn $\omega\left(q\right)$ enthält keine Punkte aus P, und $\mathbb{R}^2$ ist die disjunkte Vereinigung der drei Mengen $G_{\text{i}}, G_{\text{a}}$ und P). Die Mengen $\left(A' \cap \omega\left(q\right)\right)$ und $\left(B' \cap \omega\left(q\right)\right)$ sind disjunkt und relativ offen in $\omega\left(q\right)$, weil G_{i} und G_{a} offen im $\mathbb{R}^2$ sind. Also ist wegen der Zusammenhangsbedingung eine davon leer. Deswegen kann $\omega\left(q\right)$ nicht gleichzeitig einen Punkt im Inneren und im Äußeren des von P berandeten Gebiets enthalten. $\square$