

Globale Bifurkationen
Rotationszahlen und
Verzweigungen ein-dimensionaler Abbildungen
SoSe 2006
geleitet durch Prof. Gunesch

Patrick Schuch

10. Juli 2006

Einleitung

Das Thema dieses Vortrages sind globale Bifurkationen. Im Gegensatz zu den bisherigen Vorträgen in denen Systeme nur in einzelnen Punkten betrachtet wurden oder in Normalform gebracht wurden, werden hier nun Systeme betrachtet, die sich einem nicht durch solche lokalen Betrachtungen erschließen. Vielmehr muss man hier die *globalen* Aspekte der Flüsse und Abbildungen ins Auge fassen.

Der Vortrag gliedert sich in drei Abschnitte: Im ersten Teil will ich noch kurz einige notwendigen Grundlagen wieder auffrischen. Im zweiten Teil werde ich auf dann speziell auf Rotationszahlen zu sprechen kommen. Im dritten und letzten Abschnitt rücken dann die Verzweigungen ein-dimensionaler Abbildungen in den Mittelpunkt.

1 Wiederauffrischung

In den beiden Vorlesungen des vergangenen Jahres - Einführung in Dynamische Systeme (SoSe 2005) und Dynamische Systeme (WiSe 2005/06) - sind wir schon recht gut mit den Grundlagen meines Seminarthemas vertraut. Nichts desto trotz sollte an dieser Stelle das Wissen noch einmal aufgefrischt werden.

Beginnen wir mit zwei Bezeichnungen spezieller Abbildungen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen X und Y :

Definition 1.0.1 (Homöomorphismus) Eine stetige bijektive Abbildung $f : U \rightarrow V$ einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset Y$ mit ebenfalls stetiger Inverser $f^{-1} : V \rightarrow U$ nennt man einen **Homöomorphismus**.

Definition 1.0.2 (Diffeomorphismus) Eine bijektive C^1 -Abbildung $f : U \rightarrow V$ einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset Y$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn die Umkehrung $f^{-1} : V \rightarrow U$ ebenfalls eine C^1 -Abbildung ist.

Für C^k -Abbildungen sagt man dem entsprechend **C^k -Diffeomorphismus**.

Wir betrachten Abbildungen auf dem Einheitskreis $S^1 = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, so dass wir θ als eine Koordinate modulo 1 benutzen können.

Definition 1.0.3 (Orientierungserhaltende Kreisabbildung) Eine Kreisabbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ heißt **orientierungserhaltend**, wenn zu einer gegebenen Ordnung auf dem Kreis für $x, y, z \in S^1$ mit $x < y < z$ gilt, dass $f(x) < f(y) < f(z)$ in derselben Ordnung auf dem Kreis gilt.

Wir setzen im Weiteren voraus, dass alle betrachteten Kreisabbildungen orientierungserhaltend sind. Das ist mitunter die Haupteigenschaft, die uns die Dynamik erhält. Durch die Orientierungserhaltung ist die Dynamik jeder Kreisabbildung *fast* so wie bei einer festen Rotation R_α auf dem Einheitskreis.

Definition 1.0.4 (R_α) Für die starre Rotation $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ gilt das Abbildungsgesetz:

$$R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha \pmod{1}$$

Wir wollen nun die Rotationszahl $\rho(f)$ einer gegebenen orientierungserhaltenden Kreisabbildung f bestimmen.

Dazu bestimmen wir - anders als in der Vorlesung - erst einmal eine andere Zahl: $\rho_y(f)$ einer Kreisabbildung f . Zur Bestimmung von $\rho_y(f)$ teilen wir den Einheitskreis S^1 in zwei Intervalle auf: $I_0 = [x, f(x))$ und $I_1 = [f(x), x)$.

Nun können wir $\rho_y(f)$ definieren als

$$\rho_y(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\text{card}\{i \mid 0 \leq i \leq n \text{ und } f^i(y) \in I_0\}] \quad (1)$$

Satz 1.0.5 $\rho_y(f)$ existiert und ist unabhängig von der Wahl des y . Für eine gegebene Kreisabbildung f gilt somit:

$$\forall y \in S^1 : \rho_y(f) = \text{const} =: \rho(f) \quad (2)$$

Definition 1.0.6 (Rotationszahl) Die durch (2) gegebene Zahl $\rho(f)$ heißt **Rotationszahl** der Abbildung f .

Die Rotationszahl, so wie sie in der Vorlesung eingeführt wurde, ergab sich über die Betrachtung von Lifts zu gegebenen Kreisabbildungen.

Definition 1.0.7 (Lift einer Kreisabbildung) Sei $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ eine Abbildung der reellen Zahlen auf der Einheitskreis mit:

$$x \mapsto \exp^{2\pi i x} \equiv \theta \quad (3)$$

Die Abbildung $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Lift von $f : S^1 \rightarrow S^1$, wenn gilt:

$$\Pi \circ F = f \circ \Pi \quad (4)$$

Lifts zu einer Abbildung f sind eindeutig bis einen additive Konstante.

Bemerkung 1.0.8 Generische Bifurkationen von Fixpunkten bei eindimensionalen Abbildungen sind entweder Sattelpunkte oder aber Periodenverdoppelungen.

2 Rotationszahl

2.1 Weitere Vorbereitungen

Für die Rotationszahlen gibt es eine Reihe von nützlichen Sätzen über Eigenschaften, von denen wir schon eine ganze Reihe kennengelernt haben. Ich will hier nun einen Auszug dieser Sätze geben.

Satz 2.1.1 Seien f und g orientierungserhaltende Homöomorphismen auf S^1 . Für $\varepsilon > 0$ und $0 \neq \rho(f) \neq 1$, existiert ein $\delta > 0$, so dass mit $\sup |f - g| < \delta$ folgt, dass $|\rho(f) - \rho(g)| < \varepsilon$

Satz 2.1.2 Sei f_t eine Familie orientierungserhaltender Homöomorphismen aus dem Einheitskreis S^1 , die folgende Bedingungen erfüllen:

- mit $t_0 < t_1$ auch $f_{t_0} < f_{t_1}$ gilt.
- für kein t besitzt das zugehörige f_t einen Fixpunkt.

Dann folgt aus $t_0 < t_1$, dass auch $\rho(f_{t_0}) \leq \rho(f_{t_1})$.

Satz 2.1.3 $\rho(f)$ ist genau dann rational, wenn f ein periodisches Orbit hat.

Die Voraussetzungen, die sich mit den bisherigen Sätzen ergeben, zählen praktisch die topologischen Eigenschaften aller Kreishomöomorphismen auf.

Im Grunde stellen die feste Rotationen Modelle für das asymptotische Verhalten aller Trajektorien zur Verfügung:

- Ist $\rho(f)$ rational, so sind alle Trajektorien von f asymptotisch periodisch.
- Ist $\rho(f)$ irrational, so verhalten sich die Trajektorien in sofern asymptotisch vorhersagbar, da sie in der gleichen Reihenfolge auftreten, wie sie es bei der starren Rotation $R_{\rho(f)}$ täten.

Bemerkung 2.1.4 Bei WIGGINS findet sich folgende Einteilung von Abbildungen in jene mit rationaler und jene mit irrationaler Rotationszahl ein:

- $\rho = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es für beliebige Ausgangspositionen drei Möglichkeiten:
 - Ein $\frac{p}{q}$ -periodisches Orbit.
 - Ein homoklines Orbit, das sich einem periodischen Orbit asymptotisch nähert für sehr große $|n|$.
 - Ein heteroklines Orbit, das sich für $n \rightarrow -\infty$ einem periodischen Orbit und für $n \rightarrow \infty$ einem anderen Orbit annähert.
- Für $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es auch wieder drei Möglichkeiten für beliebige Ausgangspositionen:
 - Ein im Kreis dicht liegendes Orbit.
 - Ein Orbit, das in einer Cantor-Menge des Kreises dicht liegt.
 - Ein zu einer Cantor-Menge des Kreises homoklines Orbit.

Definition 2.1.5 (topologisch konjugiert) Für zwei diskrete dynamische Systeme $f : X \rightarrow X$ und $g : Y \rightarrow Y$ auf topologischen Räumen X und Y heißen f und g **topologisch konjugiert**, wenn gilt:

$$g = h^{-1} \circ f \circ h$$

mit einem Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$.

Daraus läßt sich nun folgendes Theorem ableiten:

Theorem 2.1.6 (Denjoy) Ist f ein Diffeomorphismus des Einheitskreises mit irrationaler Rotationszahl $\rho(f) = \alpha$ und $\log f'$ besitzt beschränkte Variation, dann sind f und die starre Rotation R_α topologisch konjugiert.

Bemerkung 2.1.7 Dieses Theorem haben wir in ganz ähnlicher Form auch in der Vorlesung kennengelernt. Dort kam ein Satz mit recht ähnlichen Voraussetzungen vor:

Satz 2.1.8 Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein C^1 -Diffeomorphismus mit beschränkter Variation in f' . Zudem sei f nicht topologisch transitiv. Dann gilt: f hat ein periodisches Orbit.

Daran lassen sich nun mehrere Feststellungen anknüpfen. Eine topologische Konjugation h von f zur starren Rotation R_α ist fast eindeutig.

Bemerkung 2.1.9 Sind zwei topologische Konjugationen h_1, h_2 gegeben, so bildet die Verknüpfung der einen und der Inversen der anderen Konjugation, also $h_1 h_2^{-1} =: h$, eine Konjugation der starren Rotation R_α zu sich selbst.

Für diese Selbstkonjugation h muss dann gelten

$$h(x) + n\alpha = h(x + n\alpha) \pmod{1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Aus der Tatsache, dass die Punkte $\{n\alpha \pmod{1}\}$ wegen der Irrationalität von α im Einheitskreis dicht liegen und daß h_1 und h_2 Homöomorphismen sind und damit stetig, schließen wir weiter, dass

$$h(0) + y = h(y) \pmod{1} \quad \forall y \text{ und festem } x = 0 \quad (6)$$

Damit verhält sich h selbst wie eine Rotation, für die gelten muss:

$$h(x) = h_1(h_2^{-1}(x)) = x + \beta \text{ mit } \beta = \text{const} \quad (7)$$

Darum macht es Sinn, sich über die Glattheit einer solchen topologischen Konjugation Gedanken zu machen. Für welche Fälle kann man ein solches $h(x)$ finden?

2.2

Hierbei betrachten wir eine Funktion $f(x)$, die mit einer kleinen Störung $\hat{f}(x)$ der starren Rotation R_α abweicht:

$$f(x) = R_\alpha(x) + \hat{f}(x) \text{ mit } \|\hat{f}\| \text{ klein}$$

Man denke sich folgende Darstellung des h für eine gegebene Funktion f :

$$h(f(x)) = h(x) + \alpha \quad (8)$$

wobei das α natürlich wieder gleich der Rotationszahl von f sein soll. Dann gilt auch mit einem kleinen $\|\hat{h}\|$ die folgende Gleichung

$$h = id + \hat{h} \quad (9)$$

dann kann man die Gleichung (8) auch gut linearisieren mit:

$$h(f(x)) \simeq f(x) + \hat{h}(R_\alpha(x)) \quad (10)$$

und damit dann auch

$$\hat{h}(x + \alpha) - \hat{h}(x) = \hat{f}(x) \quad (11)$$

Sowohl \hat{f} als auch \hat{h} lassen sich in Fourier-Reihen darstellen:

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \exp^{2\pi imx} \quad (12)$$

$$\hat{h}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \exp^{2\pi imx} \quad (13)$$

Was waren noch gleich Fourier-Reihen? Fourier-Reihen sind unendliche Summen von trigonometrischen Polynomen, mit denen man T -periodische Funktionen f_{per} approximieren kann.

Definition 2.2.1 (Fourier-Reihe) Zu einer gegebenen T -periodischen Funktion f_{per} heißt die unendliche Summe

$$s_{f_{per}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos(r\omega x) + \sum_{r=1}^{\infty} b_r \sin(r\omega x)$$

heißt *Fourier-Reihe* von f_{per} . Die trigonometrischen Polynome lassen sich auch komplex darstellen:

$$s_{f_{per}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp^{im\omega x}$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und Koeffizienten

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f_{per} \exp^{-im\omega x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 & \text{für } m = 0 \\ \frac{1}{2}(a_m - ib_m) & \text{für } m > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-m} + ib_m) & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

Die komplex-wertige Darstellung der Fourier-Reihe entspricht also der Darstellung mit *cos-* und *sin-Termen*.

Satz 2.2.2 (Dirichlet-Bedingungen) Erfüllt eine T -periodische Funktion f_{per} folgende Bedingungen:

- Das Definitionsintervall von f_{per} kann man in endlich viele Teilintervalle unterteilen, auf denen f_{per} stetig und monoton ist.
- An jeder Unstetigkeitsstelle x_{unst} sind der links- und rechtsseitige Grenzwert x_{unst}^- und x_{unst}^+ bekannt.

Dann konvergiert die Fourier-Reihe $s_{f_{per}}$ punktweise gegen f_{per} und es gilt:

$$s_{f_{per}}(x) = \begin{cases} \frac{x_{unst}^- + x_{unst}^+}{2} & \text{für unstetiges } x_{unst} \\ f_{per}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Sowohl \hat{f} als auch \hat{h} sind periodisch. Wären sie es nicht, so würde \hat{f} die Rotationszahl von f verändern. Die Periode ist für die hier betrachteten Fälle $T = 1$. \hat{f} und \hat{h} erfüllen die DIRICHLET-Bedingungen und konvergieren damit jeweils gegen f und h .

Nun können wir in (11) die Fourier-Reihen einsetzen:

$$\hat{h}(x + \alpha) - \hat{h}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (\exp^{2\pi im\alpha} - 1) \exp^{2\pi imx} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \exp^{2\pi imx} \quad (14)$$

Die Störung \hat{f} ist uns ja bekannt. Demnach kann man die Koeffizienten der Fourierreihe von \hat{h} wie folgt berechnen:

$$b_m = \frac{a_m}{\exp^{2\pi im\alpha} - 1} \quad \text{sofern } a_0 = 0 \quad (15)$$

Natürlich hat bei einigen Koeffizienten Probleme, denn obwohl der Nenner von (15) nicht null werden kann, da das α irrational ist, kommt der Nenner der null unter Umständen schon sehr nahe.

Definition 2.2.3 (schlecht durch rationalen approximierbare Zahlen) Eine Zahl α für die Konstanten $c, \varepsilon > 0$ existieren, so dass die Ungleichung

$$|\exp^{2\pi im\alpha} - 1| > \frac{c}{m^{1+\varepsilon}} \quad \forall m \quad (16)$$

erfüllt ist, heißen **schlecht durch rationale Zahlen approximierbar**.

Bemerkung 2.2.4 Man könnte auch für eine Ganzzahl $n(m)$, für die der Betrag $|\alpha m - n|$ klein ist, folgende Ungleichung aufstellen:

$$|\exp^{2\pi im} - 1| > |\alpha m - n| \quad (17)$$

da gilt, dass $1 = \exp^{2\pi in}$ und auch $\frac{d}{dx} \exp^{2\pi ix} > 1$ Man kann die Ungleichung (16) durch diese hier ersetzen:

$$\left| \alpha - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{c}{m^{2+\varepsilon}} \quad \forall m \text{ und } \forall n > 0 \quad (18)$$

Ist die Rotationszahl α schlecht durch rationale Zahlen approximierbar - also α genügt der Ungleichung (18) - dann konvergiert die Fourierreihe für \hat{h} .

Es gibt übrigens eine ganze Menge der schlecht durch rationale Zahlen approximierbaren Zahlen. Die Menge besitzt sogar Lebesgue-Maß 1.

Mit Hilfe der hier nicht weiter angeführten KAM-Theorie (von ARNOLD und MOSER) kann gezeigt werden, dass man das Konjugationsproblem durch diese Linearisierung lösen kann, sofern die Rotationszahl α der Ungleichung (18) genügt.

Man kann also eine glatte Transformation h finden, die eine Abbildung mit Rotationszahl α , die genügend nahe an einer echten starren Rotation R_α liegt, in eine solche starre Rotation überführen.

3 Kneading-Theory oder Knettheorie

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun um eindimensionale Abbildungen kümmern. Im Eigentlichen geht es um Bifurkationen dieser Abbildungen und wie man durch Übergang zu symbolischer Dynamik Rückschlüsse bezüglich der Dynamik der eigentlich betrachteten Abbildung ziehen kann.

Es wird sich herausstellen, dass das Orbit eines kritischen Punktes massgeblich die Dynamik der gesamten Abbildung bestimmt.

3.1 Voraussetzungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich Abbildungen des Einheitsintervalls auf sich selbst.

Wir betrachten also nur $f : I \rightarrow I$ auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$.

3.2 Definitionen in der Knettheorie

Definition 3.2.1 (unimodal) Sei $f : I \rightarrow I$ und f stetig. f heißt unimodal, wenn:

1. $f(0) = f(1) = 0$
2. f besitzt genau einen kritischen Punkt $0 \leq c_{krit} \leq 1$

Für eine unimodale Abbildung f muss natürlich gelten, dass die Steigung links des kritischen Punktes c_{krit} positiv und rechts davon negativ ist. Also

$$f'(x) > 0 \forall x \in [0, c_{krit}) \text{ und} \\ f'(x) < 0 \forall x \in (c_{krit}, 1]$$

Ein prominentes Beispiel einer solchen unimodalen Abbildung ist die quadratische, logistische Gleichung mit Parameter μ :

$$f_\mu = \mu x(1 - x) = \mu x - \mu x^2 \tag{19}$$

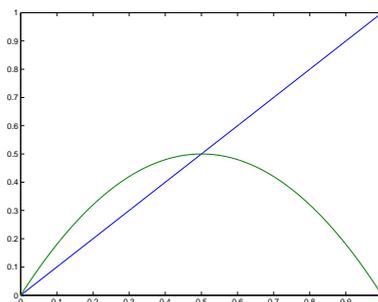


Abbildung 1: Logistische Gleichung mit $\mu = 2$ und eine id-Gerade

Hier wird ja das Einheitsintervall auf sich selbst abgebildet, wenn man I als Definitionsbereich nimmt. Der kritische Punkt liegt für alle Parameterwerte μ bei $c_{krit} = \frac{1}{2}$.

Dadurch dass ein unimodales f das Einheitsintervall I immer auf sich selbst abbildet, bleibt das Orbit des kritischen Punktes natürlich auch in I .

Unterteilen wir nun das Einheitsintervall in drei Bereiche:

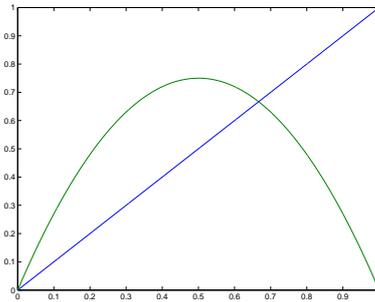


Abbildung 2: Logistische Gleichung mit $\mu = 3$ und eine id-Gerade

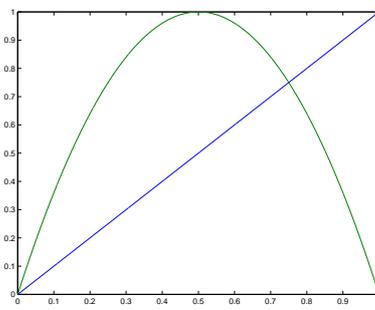


Abbildung 3: Logistische Gleichung mit $\mu = 4$ und eine id-Gerade

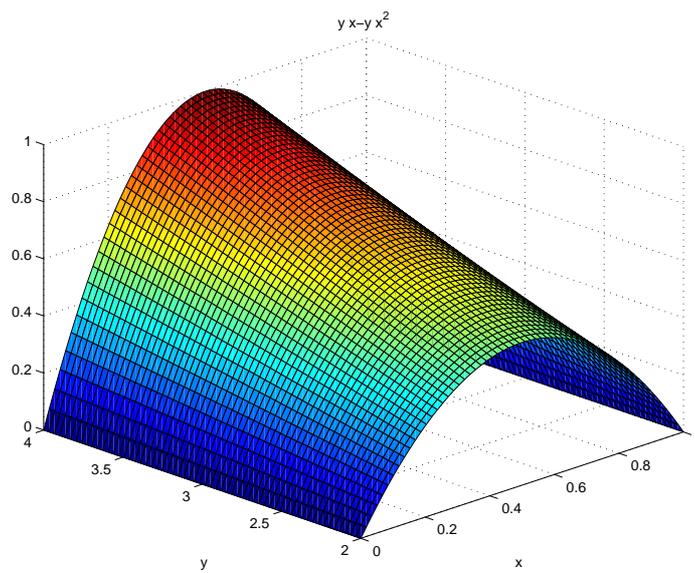


Abbildung 4: Verlauf der logistischen Gleichung bei variablem μ

Definition 3.2.2 $I = I_0 \cup C \cup I_1$ mit

$$\begin{aligned} I_0 &= [0, c_{krit}) \\ C &= /c_{krit}/ \\ I_1 &= (c_{krit}, 1] \end{aligned}$$

Definition 3.2.3 (Iterierte) Die unendliche Sequenz

$$\begin{aligned} S(x) &= (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) \text{ mit} \\ s_i &= \begin{cases} 0 & \text{für } f^i(x) \in I_0 \\ C & \text{für } f^i(x) \in C \\ 1 & \text{für } f^i(x) \in I_1 \end{cases} \end{aligned}$$

heißt Iterierte von x unter f .

Eine ganz besonders wichtige Iterierte ist die des ersten Bildes des kritischen Punkt unter f :

Definition 3.2.4 (Knetsequenz) Die Iterierte von $f(c_{krit})$ unter f

$$S(f(c)) =: K(f)$$

heißt die Knetsequenz von f .

Wie sehen solche Knetsequenzen nun aus? Nehmen wir als Beispiel die quadratische logistische Gleichung f_4

$$\begin{aligned} f_4(x) &= 4x(1-x) \text{ mit } c = \frac{1}{2} \\ f_4\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \\ \Rightarrow f(c) &= 1 \text{ und } f^i(c) = 0 \quad \forall i \geq 2, \text{ denn} \\ f_4(1) &= 4 * 1(1 - 1) = 0 \text{ und} \\ f_4(0) &= 4 * 0(1 - 0) = 0 \\ \Rightarrow K(f_4) &= (10000\dots) \end{aligned}$$

Für $\mu = 2$ ergibt sich die Knetsequenz zu

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2x(1-x) \text{ wieder mit } c_{krit} = \frac{1}{2} \\ f_2\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 * \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow c_{krit} \text{ ist Fixpunkt} \\ &\Rightarrow K(f_2) = (CCCC\dots) \end{aligned}$$

Für die Iterierten gibt es im Allgemeinen eine sehr große Anzahl an Möglichkeiten. Taucht in ein Sequenz allerdings einmal ein c auf ist ab diesem Sequenzeintrag natürlich dann die Knetsequenz zu finden.

Definition 3.2.5 (reguläre Sequenz) Eine Sequenz heißt regulär, wenn die Sequenz nur aus 0 und 1 besteht.

Bemerkung 3.2.6 *Im Allgemeinen kann man zu einer beliebigen Sequenz Abbildungen konstruieren und einen Punkte finden, die diese Sequenz dann erfüllen. Zu einer gegebenen Abbildung ist die Zahl der Sequenzen normalerweise aber begrenzt. Beispielsweise sind für Parameter $1 \leq \mu \leq 2$ nur diese Sequenzen möglich:*

(0000...)
 (1000...)
 (C000...)

oder aber für $2 \leq \mu \leq 3$:

(C111...)
 (0000...)
 (1111...)
 (0...01111...)
 (0...0C1111...)
 (1C1111...)(10000...)
 (1111...)
 (1111...)
 (100...01111...)
 (100...0C1111...)

Wir wissen, f_μ hat einen attraktiven Fixpunkt für $1 < \mu < 3$, aber dennoch ändern sich die auftretenden Sequenzen. Bei $\mu = 2$ tritt ein Sprung auf, da c_{krit} dort selbst periodisch wird ($K(f_2) = (CCCC\dots)$).

Periodische Knetsequenzen treten genau dann auf, wenn c_{krit} selbst ein periodischer Punkt ist.

Definition 3.2.7 *Die Diskrepanz zweier Sequenzen $T = (t_0t_1t_2t_3\dots)$ und $U = (u_0u_1u_2u_3\dots)$ ist genau n , wenn gilt $\forall i \leq n : u_i = t_i$ und $u_n \neq t_n$*

Definition 3.2.8 *Die Anzahl der Einsen in den ersten n Sequenzeinträgen einer Sequenz T heißt $\tau_n(T)$.*

Wir ordnen nun $0 < C < 1$.

Definition 3.2.9 *Sequenzen T und U haben Diskrepanz n . Dann ist $s \prec t$, wenn gilt*

- Entweder $\tau_{n-1}(T)$ ist gerade und $T_n < U_n$
- oder $\tau_{n-1}(T)$ ist ungerade und $T_n > U_n$.

Diese Ordnung ist durchaus gerechtfertigt, da sie folgende Implikation gestattet:

$$x < y \Rightarrow S(x) \prec S(y)$$

3.3 Abschluß

Ich möchte nun noch ein Theorem anführen mit der man die Existenz gewisser Sequenzen begründen kann:

Theorem 3.3.1 Sei f unimodal und der kritische Punkt c_{krit} nicht periodisch. σ sei der gewöhnliche Shift-Operator. Erfüllt eine beliebige Sequenz T

$$\sigma^n(T) \prec K(f) \forall n \geq 1$$

dann existiert auch ein $x \in I : S(x) = T$. T heißt dann zulässig. Σ_f ist die Menge der zulässigen Sequenzen.

Zulässige Sequenzen treten auf.

Was alles zulässig ist, hängt also von der Knetsequenz ab. $f(c_{krit})$ ist ja das Maximum auf I bei einer unimodalen Abbildung f . Daher muss $f^n(x) \leq f(c) \forall n \geq 1 \forall x \in I$. Dann kann man auch keine Sequenz finden, die größer sein können als die Knetsequenz, egal wie man die Sequenz shiftet.

Mit der Knettheorie kann man noch eine Menge mehr an Beweisen und Sätzen finden, auf diese möchte ich hier nun aber nicht mehr eingehen.

Literatur

Für dieses Seminar wurden folgende Quellen verwendet:

Guckenheimer/Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vektorfields (Springer)

Wiggins : Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos (Springer)

Devaney: An Introduction To Chaotic Dynamical Systems (Westview Press)

Guckenheimer/Moser/Newhouse: Dynamical Systems (Birkhuser)

wikipedia.com

Für die numerische Darstellung hilfreich ist:

Lynch: Dynamical Systems With Applications Using MATLAB