

Die Van der Pol - Gleichung

Philip Kaltner

2.5.2006

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

Die Gleichung

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$

Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$

Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$

Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

Wir haben die Gleichung

$$\ddot{x} + \alpha\phi(x)\dot{x} + x = \beta p(t)$$

mit geradem $\phi(x)$ sowie $\phi < 0$ für $|x| < 1$ und $\phi > 0$ für $|x| > 1$.
Die Funktion $p(t)$ ist T -periodisch und α, β sind nichtnegativ.

Autonomisieren liefert das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \alpha\Phi(x), \\ \dot{y} &= -x + \beta p(\theta), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

(„Ursprungssystem“)

Wir wählen als konkrete Funktionen

$$\phi(x) = x^2 - 1,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{3}x^3 - x,$$

$$p(t) = \cos(\omega t).$$

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$

Wir haben also

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} - x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rotationstransformation und Approximation (gem. Kap. 4) liefert in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \dot{\phi} &= 0 + \mathcal{O}(\alpha^2).\end{aligned}$$

Langfristig erhalten wir also

$$\begin{aligned}r &= 2 + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \phi &= \phi_0 + \mathcal{O}(\alpha^2).\end{aligned}$$

Für $\beta = 0, \alpha \ll 1$ hat das System also einen Grenzyklus.

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$ **Fall 2:** $\beta = 0, \alpha < 1$

Wir betrachten dieselben Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \alpha \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right), \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

mit nun nicht mehr so kleinem α .

Transformation $\hat{y} = \frac{1}{\alpha}y$ und Weglassen des Daches liefert

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha \left(y - \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right), \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\alpha}x.\end{aligned}$$

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

► $(0,0)$ ist FP.

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.
- ▶ Für $y = \frac{x^3}{3} - x$ (das sei Kurve c) ist $\dot{x} = 0$.

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.
- ▶ Für $y = \frac{x^3}{3} - x$ (das sei Kurve c) ist $\dot{x} = 0$.
- ▶ Auf c haben wir $\dot{y} = -\frac{1}{\alpha}x$.

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.
- ▶ Für $y = \frac{x^3}{3} - x$ (das sei Kurve c) ist $\dot{x} = 0$.
- ▶ Auf c haben wir $\dot{y} = -\frac{1}{\alpha}x$.
- ▶ Was passiert über/unter c ?

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.
- ▶ Für $y = \frac{x^3}{3} - x$ (das sei Kurve c) ist $\dot{x} = 0$.
- ▶ Auf c haben wir $\dot{y} = -\frac{1}{\alpha}x$.
- ▶ Was passiert über/unter c ?
- ▶ Scheinbar existiert ein periodisches Orbit!

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.
- ▶ Für $y = \frac{x^3}{3} - x$ (das sei Kurve c) ist $\dot{x} = 0$.
- ▶ Auf c haben wir $\dot{y} = -\frac{1}{\alpha}x$.
- ▶ Was passiert über/unter c ?
- ▶ Scheinbar existiert ein periodisches Orbit!
- ▶ Numerik

- ▶ $(0,0)$ ist FP.
- ▶ α groß $\Rightarrow \dot{y}$ klein.
- ▶ Für $y = \frac{x^3}{3} - x$ (das sei Kurve c) ist $\dot{x} = 0$.
- ▶ Auf c haben wir $\dot{y} = -\frac{1}{\alpha}x$.
- ▶ Was passiert über/unter c ?
- ▶ Scheinbar existiert ein periodisches Orbit!
- ▶ Numerik
- ▶ Beweis $\exists R, \nexists \text{FP}, \text{Pc-B}$

Übersicht

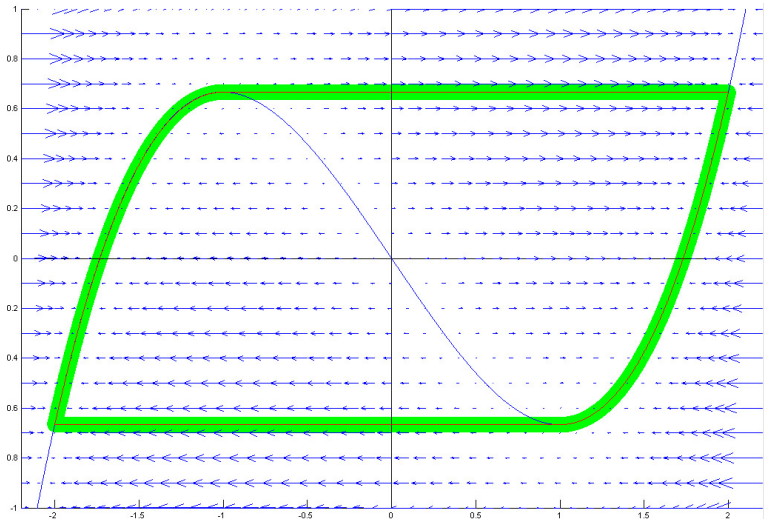
Die Gleichung

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$

Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$

Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$

Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$



Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ **Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$** Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$ **Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$**

Transformiere Ursprungssystem mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und approximiere zu

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\alpha}{2} \left(u - \sigma v - \frac{u}{4} (u^2 + v^2) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \dot{v} &= \frac{\alpha}{2} \left(\sigma u + v - \frac{v}{4} (u^2 + v^2) \right) - \frac{\beta}{2\omega} + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned}$$

mit $\sigma = \frac{1-\omega^2}{\alpha\omega}$. Noch ein Rechenschritt...

Skalieren von u, v mit 2 sowie t mit $\frac{\alpha}{2}$ und Weglassen von $\mathcal{O}(\alpha^2)$ liefert

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u - \sigma v - u(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= \sigma u + v - v(u^2 + v^2) - \gamma\end{aligned}$$

mit $\gamma = \frac{\beta}{2\omega}$.

Der Parameterraum besteht aus σ und γ . Wir betrachten...

Übersicht

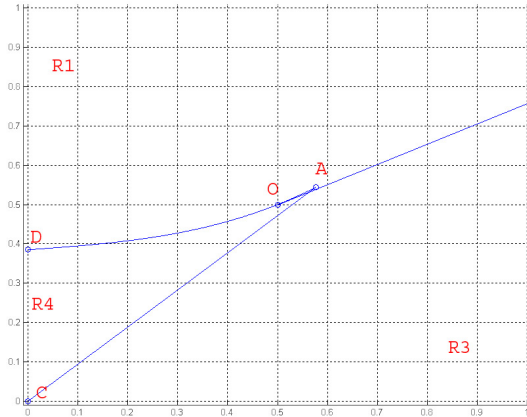
Die Gleichung

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$

Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$

Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$

Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$



Ausblick Cartwright: $R4 = R4a \cup R4b$, $R4a$ hat einen Grenzyklus, $R4b$ nicht, ergo existieren weitere Bifurkationspunkte.

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$ **Fall 4:** $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

Betrachte wieder

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha (y - \Phi(x)), \\ \dot{y} &= \frac{1}{\alpha} (-x + \beta p(t)).\end{aligned}$$

Ist α groß genug, kann ein Einzugsgebiet $R \in \mathbb{R}^2$ gefunden werden.

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

► Einzugsgebiet $R \in \mathbb{R}^2$

- ▶ Einzugsgebiet $R \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Poincaré-Abbildung P mit $P(R) \subset R$

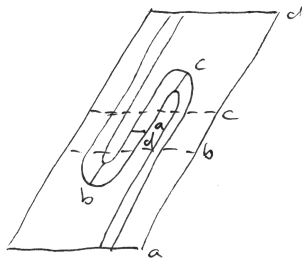
- ▶ Einzugsgebiet $R \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Poincaré-Abbildung P mit $P(R) \subset R$
- ▶ Attraktorenmenge $A = \bigcap_{n \geq 0} P^n(R)$

- ▶ Einzugsgebiet $R \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Poincaré-Abbildung P mit $P(R) \subset R$
- ▶ Attraktorenmenge $A = \bigcap_{n \geq 0} P^n(R)$
- ▶ Ist A eine geschlossene Kurve?

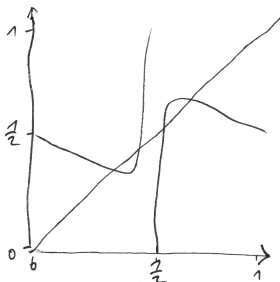
- ▶ Ein Rechteck R^+ bewegt sich im Kreis.
- ▶ Auf $y = \Phi(x)$ langsame Bewegung.
- ▶ Horizontalbewegung schnell („Jump“).
- ▶ Symmetrie, P ist nun ein Jump.

- ▶ $P^2(R^+)$ ist ein Umlauf von R^+ .
- ▶ Levi zeigte, daß dabei einiges passiert. . .

R^+ wird gestreckt, gefaltet und verbogen:



Eine Darstellung der Abbildung als Kreisabbildung interpretiert:



Definiere Folge $\{x_k\}$, $x_k = f^k(x_0)$.

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

► 4er-Übergangsmatrix

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

- ▶ 4er-Übergangsmatrix
- ▶ Beschränke auf l_1, l_2

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

- ▶ 4er-Übergangsmatrix
- ▶ Beschränke auf l_1, l_2
- ▶ Folgen $\{a_k\}$

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$ Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$ Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$ Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$

- ▶ 4er-Übergangsmatrix
- ▶ Beschränke auf l_1, l_2
- ▶ Folgen $\{a_k\}$
- ▶ Shift σ

- Kreisabbildung f ist expansiv, zwei sehr nahe Folgen $\{x_k\}_{1,2}$ werden also irgendwann in verschiedene Intervalle abgebildet, also sind die zugehörigen $\{a_k\}_{1,2}$ verschieden.

- ▶ Kreisabbildung f ist expansiv, zwei sehr nahe Folgen $\{x_k\}_{1,2}$ werden also irgendwann in verschiedene Intervalle abgebildet, also sind die zugehörigen $\{a_k\}_{1,2}$ verschieden.
- ▶ Zwei verschiedene $\{a_k\}_{1,2}$ gehören sicher nicht zu gleichen Folgen $\{x_k\}_{1,2}$.

- ▶ Kreisabbildung f ist expansiv, zwei sehr nahe Folgen $\{x_k\}_{1,2}$ werden also irgendwann in verschiedene Intervalle abgebildet, also sind die zugehörigen $\{a_k\}_{1,2}$ verschieden.
- ▶ Zwei verschiedene $\{a_k\}_{1,2}$ gehören sicher nicht zu gleichen Folgen $\{x_k\}_{1,2}$.
- ▶ Bijektivität.

Nun können wir periodische Symbolfolgen auf endlichem Alphabet abzählen:

Perioden- länge	Anzahl Orbits	Symbol- Folgen
1	2	1..., 2...
2	1	12...
3	2	112..., 122...
4	3	1112..., 1122..., 1222...
5	6	11112..., 11122..., 11222..., 12222... 12121..., 21212...

Die Invariantenmenge, also die Punkte, die unter f stets in $I_1 \cup I_2$ bleiben, besteht aus

- ▶ abzählbar unendlich vielen periodischen Punkten
- ▶ und überabzählbar vielen nicht-periodischen Punkten.

Wir linearisieren die Kreisabbildung zu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - x) & x \in [0, \frac{18}{41}] \\ 10x - 4 & x \in [\frac{18}{41}, \frac{1}{2}] \\ 10x - 5 & x \in [\frac{1}{2}, \frac{23}{41}] \\ \frac{1}{4}(3 - x) & x \in [\frac{23}{41}, 1] \end{cases}$$

Das schauen wir uns an...

Übersicht

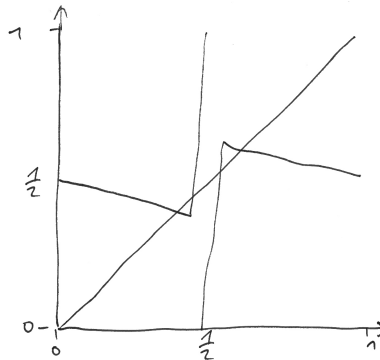
Die Gleichung

Fall 1: $\beta = 0, \alpha \ll 1$

Fall 2: $\beta = 0, \alpha < 1$

Fall 3: $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$

Fall 4: $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$



... und erkennen vier Fixpunkte...

... und werfen sie in den Rechner. Ergebnis:

- Die Folgen konvergieren wie vermutet gegen (einige) Fixpunkte.

... und werfen sie in den Rechner. Ergebnis:

- ▶ Die Folgen konvergieren wie vermutet gegen (einige) Fixpunkte.
- ▶ Sie konvergieren für unterschiedliche Startwerte in unterschiedliche Fixpunkte.

... und werfen sie in den Rechner. Ergebnis:

- ▶ Die Folgen konvergieren wie vermutet gegen (einige) Fixpunkte.
- ▶ Sie konvergieren für unterschiedliche Startwerte in unterschiedliche Fixpunkte.
- ▶ Extreme Datensensibilität: Betrachte die Startpunkte

$$x_i = x_0 + i \cdot 10^{-11}, \quad i \in \{0, 3, 6\}.$$

Für $i = 0$ und $i = 6$ konvergieren die Folgen gegen denselben Fixpunkt, für $i = 3$ jedoch gegen einen anderen!