Bifurkationen in Kodimension 1 von Gleichgewichtspunkten, Abbildungen und periodischen Orbits

Jeremias Lauterbach

23.05.2006

Bifurkationen in Kodimension 1 von Gleichgewichtspunkten

In dem ersten Teil dieser Arbeit werden wir lokale Bifurkationen von Gleichgewichtspunkten von Sytemen

$$\dot{x} = f_\mu(x) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R},\ f_\mu \text{ glatt} \tag{1}$$

betrachten. Zunächst stellt sich die Frage wann Bifurkationen von Gleichgewichtspunkten auftreten. Klar ist, dass für festes $\mu = \mu_0$ in einem hyperbolischen Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = f_{\mu_0}(x)$ keine Bifurkation auftreten kann, denn das würde für alle μ in einer Umgebung um $\mu_0 \in \mathbb{R}$ bedeuten, dass das qualitative Verhalten eines Systems $\dot{x} = f_\mu(x)$ dem Verhalten des Systems für $\mu = \mu_0$ entspricht (Hartman-Grobman-Theorem). Für einen Bifurkationspunkt (x_0, μ_0) muss also gelten, dass die Linearisierung $Df_{\mu_0}(x_0)$ mindestens einen Eigenwert mit Realteil Null besitzen muss.

Generizität Es stellen sich zunächst zwei Fragen: Wie sehen 'typischerweise' die Eigenwerte von $Df_{\mu_0}(x_0)$ in einem Bifurkationspunkt (x_0, μ_0) aus und wie sieht dann die 'typische' Bifurkation aus, bzw. gibt es eine solche.
Bevor wir diese Fragen klären können benötigen wir eine geeignete Definition des Begriffs 'typisch'. Wir nennen eine Eigenschaft einer glatten Funktion generisch, wenn die Menge der Funktionen, die diese Eigenschaft erfüllt dicht und offen im Raum aller glatten Funktionen ist. Das bedeutet also, dass beliebig kleine Störungen einer glatten Funktion diese Eigenschaft besitzen.
Die erste Frage lässt sich wie folgt beantworten: Normalerweise hat $Df_{\mu_0}(x_0)$ einen einfachen Eigenwert Null oder zwei komplex konjugierte Eigenwerte mit Realteil Null. Ist x_0 ein nicht-hyperbolischer Gleichgewichtspunkt für ein System $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f glatt mit zwei oder mehr Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, so findet man eine beliebig kleine Störung, für die $Df(x_0)$ des abgeänderten Systems dann einen einfachen Eigenwert Null hat. Ist andererseits x_0 ein nicht-hyperbolischer Gleichgewichtspunkt für solch ein System mit nur einem einfachen Eigenwert Null, so gibt es im entsprechenden Raum aller glatten Abbildungen mit nicht hyperbolischem Gleichgewichtspunkt in x_0 eine offene Umgebung um f, so dass für alle Abbildungen g innerhalb dieser Umgebung $Dg(x_0)$ keine neuen Eigenwerte Null hinzubekommen hat.
Die zweite Frage ist nicht so einfach zu beantworten und wir wollen die folgenden Aussagen auch nicht beweisen.
Tatsächlich gibt es generische Bifurkationen, das bedeutet betrachten wir ein System (1) und stellen an dieses Bedingungen, so erhalten wir Bifurkationstypen, die dann generischerweise in einem Gleichgewichtspunkt aufteten. Betrachtet man Systeme (1) ohne weitere Forderungen zu stellen, ergibt sich, dass die generische Bifurkation die Sattel-Knoten Bifurkation ist. Alle hier behandelten

Bifurkationen sind im entsprechenden Kontext generische Bifurkationen.

Im folgenden wollen wir drei verschiedene Typen lokaler Bifurkationen von Gleichgewichtspunkten betrachten, die Sattel-Knoten Bifurkation, die Transkritische Bifurkation und die Pitchfork Bifurkation. Betrachtet in entsprechenden Räumen sind diese drei Bifurkationen generisch. Ziel soll eine Charakterisierung dieser Bifurkationen in dem allgemeinen System $\dot{x} = f_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, f_μ glatt, sein. Die betrachteten Bifurkationen werden durch folgende, von einem Parameter μ abhängende, Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \quad \text{(Sattel-Knoten Bifurkation)} \\ \dot{x} &= \mu x - x^2 \quad \text{(Transkritische Bifurkation)} \\ \dot{x} &= \mu x - x^3 \quad \text{(Pitchfork Bifurkation)} \end{aligned}$$

Bifurkationen von Gleichgewichtspunkten mit einfachem Eigenwert 0 Wir betrachten das System (1) und nehmen an, dass bei $\mu = \mu_0$, $x = x_0$ ein Gleichgewichtspunkt liegt, für den $Df_{\mu_0}(x_0)$ einen einfachen Eigenwert Null hat. Nun folgt aus dem Zentrums-Mannigfaltigkeiten-Theorem, dass wir eine 2-dimensionale Zentrums-Mannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ durch (x_0, μ_0) finden, so dass gilt:

1. In einer entsprechenden Umgebung von (x_0, μ_0) ist Σ eine C^r-Mannigfaltigkeit für alle endlichen r.
2. Der Tangentialraum von Σ in (x_0, μ_0) wird von einem Eigenvektor für Null und einem Vektor parallel zur μ-Achse aufgespannt.
3. Das Feld von (1) liegt tangential an Σ in (x_0, μ_0).
4. Es gibt eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ von (x_0, μ_0), so dass alle Lösungen, die für alle Zeiten in U enthalten sind, in Σ liegen. Unter anderem liegen damit auch alle Gleichgewichtspunkte und periodischen Lösungen in Σ.

Nun können wir die Einschränkung von (1) auf Σ betrachten und erhalten für festen Parameterwert μ 1-dimensionale Kurven $\Sigma_\mu \subset \Sigma$. Diese Familie repräsentiert dann unser Bifurkationsproblem.

Wir werden nun für die Sattel-Knoten Bifurkation, die Transkritische Bifurkation und die Pitchfork Bifurkation Sätze formulieren, die Aussagen darüber machen, wann die jeweilige Bifurkation in einem Gleichgewichtspunkt eines Systems (1) auftritt. Dabei werden wir für die Sattel-Knoten Bifurkation den Satz für ein allgemeines System (1) angeben und dabei die Anwendung des Zentrums-Mannigfaltigkeiten-Theorems demonstrieren, danach beschränken wir uns auf das auf eine Zentrums-Mannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eingeschränkte 2-dimensionale Bifurkationsproblem.

Die Sattel-Knoten Bifurkation Der folgende Satz sagt uns, wann ein System (1) eine Sattel-Knoten Bifurkation für einen Gleichgewichtspunkt hat:

Satz 1 *Sei $\dot{x} = f_\mu(x)$ ein Differentialgleichungssystem im $\mathbb{R}^n$, das von einem Parameter μ abhängt. Für $\mu = \mu_0$ sei p ein Gleichgewichtspunkt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(SN1) *$D_x f_{\mu_0}(p)$ hat einen einfachen Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor v und linken Eigenvektor w.*

(SN2) $w((\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu})(p, \mu_0)) \neq 0$

(SN3) $w(D_x^2 f_{\mu_0}(p)(v, v)) \neq 0$

Dann gibt es ein glatte Kurve von Gleichgewichtspunkten in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ durch (p, μ_0) tangential an die Hyperebene $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$. In Abhängigkeit der Vorzeichen von (SN2) und (SN3) gibt es keine Gleichgewichtspunkte nahe bei (p, μ_0) für $\mu < \mu_0$ ($\mu > \mu_0$) und zwei Gleichgewichtspunkte für jeden Parameterwert $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$). Die beiden Gleichgewichtspunkte von (1) nahe bei (p, μ_0) sind hyperbolisch.

Beweis *Zunächst wenden wir das Zentrums-Mannigfaltigkeiten-Theorem an. Wir finden eine Zentrums-Mannigfaltigkeit Σ, deren Tangentialraum in (p, μ_0) aufgespannt wird von v und einem Vektor parallel zur μ-Achse. Des weiteren wissen wir, dass in einer Umgebung von (p, μ_0) alle Gleichgewichtspunkte von (1) in Σ liegen und das Feld von (1) in (p, μ_0) tangential an Σ liegt. Wir beschränken unsere Betrachtungen nun also auf das zweidimensionale Bifurkationsproblem in Σ.*
Aus (SN2) folgt, dass $\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dabei definieren wir f ab jetzt als die Einschränkung auf Σ. Der Satz über implizite Funktionen sagt uns dann, dass es eine eindeutige Kurve von Gleichgewichtspunkten in Σ durch (x_0, μ_0) gibt.
Aus (SN3) folgt die Bedingung $\frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x^2}(x_0) \neq 0$, also, dass diese Kurve lokal auf einer Seite der Geraden $\mu = \mu_0$ liegt und sich quadratisch von ihr entfernt.
Übertragen wir dieses Ergebnis zurück auf die allgemeine Situation im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ so folgen alle Aussagen direkt. $\square$

Die große Bedeutung der Sattel-Knoten Bifurkation folgt aus ihrer Generizität. Jede zu einer von einem Parameter abhängenden Familie gehörende Bifurkation von einem Gleichgewichtspunkt mit einfachem Eigenwert 0 lässt sich durch kleine Störungen entweder auflösen oder in Sattel-Knoten Bifurkationen abändern. Trotzdem tritt die Sattel-Knoten Bifurkation in diversen Anwendungen nicht auf, sondern zum Beispiel die Transkritische Bifurkation und die Pitchfork Bifurkation.

Die Transkritische Bifurkation In einigen Bifurkationsproblemen wird gefordert, das $f_\mu(0) = 0$ für alle μ, also dass $x = 0$ für alle Parameterwerte μ ein Gleichgewichtspunkt ist. In solchen Problemen kann also die Sattel-Knoten Bifurkation nicht auftreten, da es bei dieser Paramterwerte gibt, für die kein Gleichgewichtspunkt existiert. In diesem Fall ist die generische Bifurkation die sogenannte Transkritische Bifurkation.

Satz 2 *Sei $\dot{x} = f_\mu(x)$ eine Differentialgleichung in $\mathbb{R}$, die von einem Parameter μ abhängt. Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ sei $x = 0$ ein Gleichgewichtspunkt und für $\mu = \mu_0$ sei $x = 0$ ein Gleichgewichtspunkt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(TC1) $\frac{df_{\mu_0}}{dx}(0) = 0$

(TC2) $\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(0, \mu_0) = 0$

(TC3) $\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial \mu \partial x}(0, \mu_0) \neq 0$

(TC4) $\frac{d^2 f_{\mu_0}}{dx^2}(0) \neq 0$

(Die Bedingung (TC2) folgt aus der Forderung, dass $x = 0$ für alle μ ein Gleichgewichtspunkt von f ist).
Dann ist $x = 0$ eine Kurve von Gleichgewichtspunkten und es gibt eine zweite Gerade von Gleichgewichtspunkten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die die μ-Achse $\mathbb{R} \times \{\mu_0\}$ in $(0, \mu_0)$ schneidet. Für $\mu < \mu_0$ sind die Gleichgewichtspunkte auf einer der beiden Kurven stabil, auf der anderen instabil. Bei $\mu = \mu_0$ tauschen die Kurven ihre Stabilität.

Beweis *Aus (TC2) folgt, dass es mehr als eine Kurve von Gleichgewichtspunkten durch $(0, \mu_0)$ geben kann, da der Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar ist. Wegen $f_\mu(0) = 0$ für alle μ können wir annehmen, dass sich das Vektorfeld schreiben lässt als*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xF(x, \mu), \quad \textit{wobei} \\ F(x, \mu) &= \begin{cases} \frac{f(x,\mu)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu_0), & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt für F

$$F(0,\mu_0) = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,\mu_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,\mu_0) \neq 0$$

Das bedeutet, wir können auf F den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten, dass es für kleine x eine Funktion $\mu(x)$ gibt, so dass

$$F(x,\mu(x)) = 0.$$

Damit diese Kurve die μ-Achse in $(0,\mu_0)$ schneidet müsste gelten, dass

$$\frac{d\mu}{dx}(0) \neq 0$$

Nun erhalten wir aber aus dem Satz über implizite Funktionen weiter

$$\frac{d\mu}{dx}(0) \quad = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,\mu_0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,\mu_0)} = \quad \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\mu_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,\mu_0)} \neq 0. \quad \square$$

Zu beachten ist, dass, wie oben bereits erwähnt, auf Grund der Forderung $f_\mu(0) = 0$ die Bedingung (SN2) nicht erfüllt werden kann und durch die Bedingung (TC2) ersetzt wird.

Die Pitchfork Bifurkation Ein weiterer Fall in dem die Sattel-Knoten Bifurkation nicht auftritt entsteht, wenn das System (1) Symmetrien aufweist. Ein eindimensionales System heißt symmetrisch, wenn $f_\mu(-x) = -f_\mu(x)$. In diesem Fall ist f_μ also immer eine ungerade Funtion und $f_\mu(0) = 0 \ \forall \mu \in \mathbb{R}$. Trotzdem kann in diesen Fällen nicht die Transkritische Bifurkation auftreten, da auf Grund der Forderung $f_\mu(-x) = -f_\mu(x)$ die Bedingung (TC3) nicht erfüllt werden kann: Für eine ungerade Funktion kann nicht gelten $\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x^2} \neq 0$.
Oft werden physikalische Systeme in einer Weise formuliert, in der Symmetrien auftreten, z.B. die Duffing Gleichung oder auch das Lorenz-System. Die Duffing Gleichung ist symmetrisch unter $(x,y) \to (-x,-y)$, die Lorenzgleichung ist symmetrisch unter $(x,y,z) \to (-x,-y,z)$.

Satz 3 *Sei $\dot{x} = f_\mu(x)$ eine Differentialgleichung in $\mathbb{R}$, die von einem Parameter μ abhängt. Für $\mu = \mu_0$ sei 0 ein Gleichgewichtspunkt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(PF1) $\frac{df_{\mu_0}}{dx}(0) = 0$

(PF2) $\frac{\partial f_\mu}{\partial \mu}(0, \mu_0) = 0$

(PF3) $\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial \mu \partial x}(0, \mu_0) \neq 0$

(PF4) $\frac{d^2 f_{\mu_0}}{dx^2}(0) = 0$

(PF5) $\frac{d^3 f_{\mu_0}}{dx^3}(0) \neq 0$

(Ist f symmetrisch, so folgt daraus die Bedingung (PF4)).
Dann ist $x = 0$ ein Gleichgewichtspunkt für alle Parameterwerte μ und im Punkt μ_0 ändert sich die Stabilität dieses Gleichgewichtspunktes. Für $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$) entsteht ein neues symmetrisches Paar von Gleichgewichtspunkten, das nur auf einer Seite der μ-Achse liegt.

Beweis *Aus (PF2) folgt, dass es mehr als eine Kurve von Gleichgewichtspunkten durch $(0, \mu_0)$ geben kann, da der Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar ist. Wegen $f_\mu(0) = 0$ für alle μ können wir annehmen, dass sich das Vektorfeld schreiben lässt als*

$$\dot{x} = xF(x, \mu), \quad \textit{wobei}$$

$$F(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x,\mu)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu_0), & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt für F

$$F(0, \mu_0) = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \mu}(0, \mu_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, \mu_0) \neq 0$$

Das bedeutet, wir können auf F den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten, dass es für kleine x eine Funktion $\mu(x)$ gibt, so dass

$$F(x, \mu(x)) = 0.$$

Damit diese Kurve auf einer Seite der μ-Achse liegt müsste gelten, dass

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0.$$

Nun erhalten wir aber aus dem Satz über implizite Funktionen weiter

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dx}(0) &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,\mu_0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,\mu_0)} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\mu_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,\mu_0)} = 0 \\
\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) &= \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,\mu_0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,\mu_0)} = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,\mu_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,\mu_0)} \neq 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Bifurkationen von Gleichgewichtspunkten mit 2 komplex konjugierten Eigenwerten mit Realteil 0 Die generische Bifurkation in diesem Fall ist die Hopf Bifurkation. Ein Modell dieser wird beschrieben durch:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + x(\mu - (x^2+y^2)) \\
\dot{y} &= x + y(\mu - (x^2+y^2))
\end{aligned}\right\} \quad \text{(Hopf Bifurkation)}$$

Die Hopf Bifurkation Wir betrachten ein System (1), so dass für μ_0 und ein $p \in \mathbb{R}^n$ gilt $f_{\mu_0}(p) = 0$ und $Df_{\mu_0}(p)$ zwei rein imaginäre Eigenwerte $\pm i\omega$, $\omega > 0$, und keine anderen Eigenwerte mit Realteil Null hat. Da $Df_{\mu_0}(p)$ invertierbar ist folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass f_μ für μ nahe bei μ_0 einen Gleichgewichtspunkt $p(\mu)$ in der Nähe von p hat, der glatt von μ abhängt. Trotzdem wird dadurch, dass sich die Dimension von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit bei dem Überqueren der Eigenwerte von $Df(p(\mu))$ der imaginären Achse ändert, eine Änderung im qualitativen Verhalten lokal um p bewirkt.

Satz 4 *Sei $\dot{x} = f_\mu(x)$ ein Differentialgleichungssystem im $\mathbb{R}^n$, das von einem Parameter μ abhängt und (x_0, μ_0) ein Gleichgewichtspunkt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(H1) *$D_x f_{\mu_0}(x_0)$ hat ein einfaches Paar rein imaginärer Eigenwerte und keine anderen Eigenwerte mit Realteil Null.*

Dann folgt aus (H1), dass es eine glatte Kurve von Gleichgewichtspunkten $(x(\mu), \mu)$ mit $x(\mu_0) = x_0$ gibt. Die Eigenwerte $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda}(\mu)$ von $D_x f_{\mu_0}(x_0)$, die in $\mu = \mu_0$ imaginär sind, hängen glatt von μ ab.

(H2) $\frac{d}{d\mu}(Re\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$

Aus (H2) folgt dann, dass es eine eindeutige drei-dimensionale Zentrums-Mannigfaltigkeit durch (x_0, μ_0) im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gibt und wir eingeschränkt auf diese das System in die Normalform bis zu Termen dritten Grades

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + ar^2)r \\ \dot{\Theta} &= (\omega + c\mu + br^2) \end{aligned}$$

ausgedrückt in Polarkoordinaten bringen können.
Wenn der Koeffizient für die Terme dritten Grades $a \neq 0$ gibt es in der Zentrums-Mannigfaltigkeit eine 2-dimensionale Fläche periodischer Lösungen, die sich quadratisch vom Eigenraum von $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda}(\mu)$ entfernt. Wenn $a > 0$ sind die periodischen Lösungen stabil, für $a < 0$ abstoßend.

Beweisidee *Aus (H1) folgt mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass es eine glatte Kurve von Gleichgewichtspunkten gibt. Aus (H2) folgt mit dem Zentrums-Mannigfaltigkeit-Theorem, dass wir eine 3-dimensionale Zentrums-Mannigfaltigkeit finden. Die Aussage über die Normalform folgt aus dem Satz über Normalformen. Gilt $a \neq 0$, dann hat $\dot{r} = 0$ nicht nur die triviale Lösung und wir erhalten periodische Lösungen für festes μ. In Σ ergibt sich dann, dass diese Lösungen auf einer Fläche liegen, die bis zu den Termen 2. Grades mit dem Paraboloiden $\mu = ar^2/d$ übereinstimmt.*

Bifurkationen in Kodimension 1 von Abbildungen und periodischen Orbits

In diesem zweiten Abschnitt untersuchen wir lokale Bifurkationen von periodischen Orbits und Abbildungen. Dabei werden wir hier nicht näher auf Bifurkationsprobleme periodischer Orbits eingehen, sondern nur erwähnen, dass diese durch Zurückführung auf Bifurkationsprobleme von Abbildungen unter Verwendung von Poincare-Abbildungen analysiert erden können.
Analog zum ersten Teil dieser Arbeit betrachten betrachten wir Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in einem Fixpunkt p. Damit dieser Fixpunkt ein Bifurkationspunkt sein kann, darf p kein hyperbolischer Fixpunkt sein. Es gibt drei mögliche (generische) Fälle, in denen dies so ist: $Df(p)$ hat einen Eigenwert $+1$, einen Eigenwert -1 oder zwei komplex konjugierte Eigenwerte λ, $\overline{\lambda}$ mit $|\lambda| = 1$. Die Bifurkationstheorie für Fixpunkte mit Eigenwert $+1$ ist analog zu der Bifurkationstheorie für Gleichgewichtspunkte mit Eigenwert 0. D.h. die generische Bifurkation in dem von einem Parameter abhängenden Problem ist die Sattel-Knoten Bifurkation, die von der Abbildung

$$f_\mu(x) \quad = \quad x + \mu - x^2 \quad \text{(Sattel-Knoten Bifurkation für Abbildungen)}$$

beschrieben wird. Die gleichen Überlegungen wie im ersten Teil führen auch hier zu der Transkritische Bifurkation und der Pitchfork Bifurkation für Abbildungen die den Bedingungen $f_\mu(0) = 0$ genügen bzw. Symmetrien unterliegen.
Im folgenden wollen wir uns mit dem Fall eines Fixpunktes p mit einem Eigenwert -1 von $Df(p)$ beschäftigen (dieser Fall existiert nicht für Gleichgewichtspunkte) und auch den Fall zweier komplex konjugierten Eigenwerte noch näher betrachten.

Die Flip Bifurkation Bifurkationen eines Fixpunktes mit Eigenwert -1 heißen Flip Bifurkation oder auch subharmonische Bifurkation oder Periodenverdopplung (period doubling bifurcation). Wir betrachten hier nur eindimensionale Abbildungen $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei μ ebanfalls ein eindimensionaler Parameter ist. Ein Bifurkationsproblem im $\mathbb{R}^n$ lässt sich mit Hilfe des Zentrums-Mannigfaltigkeit-Theorem auf das hier betrachtete zurückführen. Den folgenden Satz geben wir ohne Beweis an:

Satz 5 *Sei $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine von einem Parameter μ abhängende Familie von Abbildungen, so dass f_{μ_0} einen Fixpunkt x_0 mit Eigenwert -1 besitzt. Des weiteren gelte:*

(F1) $(\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}) = \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (\frac{\partial f}{\partial x} - 1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \neq 0$ *in* (x_0, μ_0)

(F2) $a = (\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3})) \neq 0$ *in* (x_0, μ_0)

Dann gibt es eine glatte Kurve von Fixpunkten von f_μ durch (x_0, μ_0), deren Stabilität sich in (x_0, μ_0) umkehrt. Des weiteren gibt es eine glatte Kurve γ durch (x_0, μ_0), so dass $\gamma - (x_0, \mu_0)$ eine Vereinigung von Orbits mit Periode 2 ist. γ entfernt sich quadratisch von $\mathbb{R} \times \{\mu_0\}$.

Die sekundäre Hopf Bifurkation Wir betrachten nun Bifurkationen einer Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die von einem Parameter abhängt und deren Linearisierung in einem Gleichgewichtspunkt zwei komplex konjugierte Eigenwerte λ, $\overline{\lambda}$ besitzt, das Analogon zur Hopf Bifurkation für Gleichgewichtspunkte eines Systems (1). Den folgenden Satz geben wir ohne Beweis an:

Satz 6 *Sei $f_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine einparametrige Abbildung Familie von Abbildungen, die ein glatte Familie von Fixpunkten $x_0(\mu)$, mit Eigenwerten λ, $\overline{\lambda}$ mit $Re(\lambda) = 0$, besitzt. Des weiteren gelte:*

(SH1) $|\lambda(\mu_0)| = 1$, *aber* $\lambda^j(\mu_0) \neq 0$ *für* $j = 1, 2, 3, 4$

(SH2) $\frac{d}{d\mu}(|\lambda(\mu_0)|) = d \neq 0$.

Dann gibt es eine glatte Koordinatentransformation h, so dass der Ausdruck von $hf_\mu h^{-1}$ in Polarkoordinaten die Form
$hf_\mu h^{-1}(r, \Theta) = (r(1 + d(\mu - \mu_0) + ar^2), \Theta + c + br^2) +$ *Terme höherer Ordnung hat.*
Wenn zusätzlich

(SH3) $a \neq 0$,

dann gibt es eine 2-dimensionale Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, die sich quadratisch von der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{\mu_0\}$ entfernt und unter f infariant ist. Wenn $\Sigma \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\mu\})$ mehr als ein Punkt ist, dann ist es eine einfache geschlossene Kurve.

Bemerkung *Die Bedingung $\lambda^j(\mu_0) \neq 0$ für $j = 1, 2, 3, 4$ in (SH1) ist nötig um das Auftreten von Resonanztermen bis einschließlich 3. Ordnung auszuschließen. Das ist zur Transformation auf Normalform notwendig.*