

# Dynamisches System eines springenden Balls und die Standardabbildung

Benjamin Hügelmann      Frank Binder

31. Mai 2006

## Einleitung

Wir betrachten eine zweidimensionale Funktion, welche die Bewegung eines Balles, welcher auf einer massiven Plattform springt, die in einer Sinusschwingung vibriert. Dazu betrachten wir die gewöhnliche Stoßgleichung (vgl. [12]).

$$V(t_j) - W(t_j) = -\alpha(U(t_j) - W(t_j)) \quad , \quad (1)$$

wobei  $U$  die absolute Geschwindigkeit des ankommenden Balles,  $V$  die des abspringenden Balles,  $W$  die der Plattform,  $0 < \alpha \leq 1$  die Stoßzahl und  $t = t_j$  die Zeit des  $j$ -ten Stoßes sind. Nehmen wir an, dass die Bewegung der Plattform relativ zur Bewegung des Balles (unter Einfluss der Gravitation  $g$ ) verschwindend gering ist, wird das Zeitintervall zwischen zwei stößen des Balles auf die Plattform angenähert durch

$$t_{j+1} - t_j = \frac{2V(t_j)}{g} \quad . \quad (2)$$

Die Geschwindigkeit des ankommenden Balles beim  $j + 1$ -ten Stoß wird angenähert durch

$$U(t_{j+1}) = -V(t_j) \quad . \quad (3)$$

Kombinieren wir die Formeln (1)-(3) unter Entdimensionalisierung, so erhalten wir für die Beziehung zwischen dem  $j$ -ten und  $j + 1$ -ten Stoß eine nichtlineare Abbildung. Angenommen, dass die Bewegung der Plattform  $-\beta \sin(\omega t)$  ist, erhalten wir für die Abbildung die Darstellung

$$f = f_{\alpha, \gamma}(\phi_j, v_j) : \begin{cases} \phi_{j+1} = \phi_j + v_j \quad , \\ v_{j+1} = \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \quad , \end{cases} \quad (4)$$

wobei  $\phi = \omega t$ ,  $v = 2\omega \frac{V}{g}$  und  $\gamma = 2\omega^2(1 + \alpha) \frac{\beta}{g}$ . Hierbei entsprechen  $\gamma$  der Kraftamplitude und  $\alpha$  dem Verlustfaktor. Für weitere Informationen zum mechanischen wie auch mathematischen Problem siehe auch [20] und [10].

In den vorhergehenden Vorträgen sind wir über Differentialgleichungen und Poincaré-Abbildungen zu diskreten dynamischen Systemen gekommen. Der springende Ball hingegen ist ein physikalisches System, welches direkt auf ein diskretes dynamisches System führt. Das soll jedoch nicht heissen, dass das zugrundeliegende dynamische System einfacher sei! Und obwohl numerische Berechnungen einfacher sind, da die Abbildung direkt iteriert werden kann, ist das System ebenso kompliziert wie die der vorangegangenen Vorträge.

Die Abbildung  $f$ , Formel (4), ist ein Diffeomorphismus, die Inverse ist gegeben durch:

$$f^{-1}(\phi_j, v_j) : \begin{cases} \phi_{j-1} = \phi_j - \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \quad , \\ v_{j-1} = \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \end{cases} \quad (5)$$

Da die Determinante der Jacobi-Matrix

$$|Df| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\phi_j + v_j) & \alpha + \gamma \sin(\phi_j + v_j) \end{vmatrix} = \alpha \quad (6)$$

konstant ist, ist  $f$  im vollkommen elastischen Fall, also für  $\alpha = 1$ , volumenerhaltend und im Fall  $\alpha < 1$  ist  $f$  eine Kontraktion. Ersterer (hamiltonscher) Fall wurde bereits weitgehend, vorwiegend von Physikern, studiert wegen der Relevanz für bestimmte Probleme, z.B. in der Teilchenphysik. Wer sich stärker dafür

interessiert, kann in [2], [7] und [11] Näheres nachlesen. In deren Arbeit wurde ein etwas anderes Koordinatensystem benutzt und der Diffeomorphismus wurde als „Standardabbildung“ angegeben. Darüber hinaus hat Pustylnikov ([17]) unser System betrachtet und eine exakte Abbildung für generelle periodische Erregung hergeleitet und gezeigt, dass beide, die exakte und angenäherte, Abbildungen offene Mengen für Anfangswerte  $(\phi_0, v_0)$  haben, so dass für passende  $\gamma$  und  $\alpha = 1$   $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  gilt. Entlang dieser unbeschränkten Bewegungen wurden auch beschränkte periodische Bewegungen gefunden und numerische Berechnungen lassen vermuten, dass auch beschränkte nicht-periodische Bewegungen existieren. In diesem Vortrag betrachten wir zuerst ein paar der vielen Familien von periodischen Orbits, die durch  $f$  gegeben sind und zeigen dann die Existenz des „Smale horseshoe“ ([18] und [19]), zu deutsch: Die Hufeisenabbildung. Zum Ende des ersten Kapitels werden ein paar numerische Berechnungen gezeigt, welche das typische Verhalten der Abbildung illustrieren sollen.

## Dynamik eines springenden Balls

Zuallererst merken wir an, dass im Fall  $\alpha < 1$  im Gegensatz zum von Pustylnikov betrachteten hamiltonschen Fall alle Orbits von  $f$  beschränkt bleiben. Wegen der Vorschrift (4) für  $f$  haben wir

$$|v_{j+1}| = |\alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j)| \leq \alpha |v_j| + \gamma \quad (7)$$

und folglich  $|v_{j+1}| < |v_j|$ , falls  $|v_j| > \frac{\gamma}{1-\alpha}$ . Daher bleiben alle Orbits in einem durch  $v_j = \pm \frac{\gamma}{1-\alpha}$  beschränktem Streifen.

Sehr wichtig ist eine zweite Beobachtung, nämlich dass die Vorschrift (4) für  $f$  invariant unter der Koordinatentransformation  $\phi \rightarrow \phi + 2n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  ist. Daher können wir für den Phasenraum von  $(\phi, v)$  den Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  ansetzen, wobei  $\phi$  dann modulo  $2\pi$  gerechnet wird.

Als eingegrenzter Bereich für unsere Abbildung  $f$  ergibt sich die kompakte Menge

$$D = \left\{ (\phi, v) \mid |v| \leq \varepsilon + \frac{\gamma}{1-\alpha} \right\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$$

und wir haben eine Menge von Attraktoren

$$A = \bigcap_{n \leq 0} f^n(D) \quad .$$

Um Fixpunkte  $(\hat{\phi}, \hat{v})$  von  $f$  zu finden, benutzen wir die Periodizität, wir erhalten so Paare von Punkten

$$\left( \hat{\phi}_n, \hat{v}_n \right) = \left( \arccos \left( \frac{2n\pi(\alpha-1)}{\gamma} \right), 2n\pi \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \quad (8)$$

wobei  $N$  die größte ganze Zahl ist mit

$$2N\pi(1-\alpha) < \gamma \quad . \quad (9)$$

Die Stabilität dieser Fixpunkte ist bestimmt durch die Linearisierung  $Df$  (vgl. Formel (6)). Wie wir wissen, haben wir einen anziehenden Fixpunkt, falls beide Eigenwerte betragsmäßig kleiner eins sind, einen hyperbolischen Fixpunkt, falls

ein Eigenwert betragsmäßig kleiner und einer betragsmäßig grösser eins ist, und einen abstoßenden Fixpunkt, falls beide Eigenwerte betragsmäßig grösser eins sind. Wegen  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(Df) = \alpha$  treten für  $\alpha < 1$  nur anziehende und hyperbolische Fixpunkte auf (für  $\alpha = 1$  treten nur elliptische und hyperbolische Fixpunkte auf).

Die Eigenwerte sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \left( 1 + \alpha + \gamma \sin(\hat{\phi}_n + \hat{v}_n) \right) \pm \sqrt{\left( 1 + \alpha + \gamma \sin(\hat{\phi}_n + \hat{v}_n) \right)^2 - 4\alpha} \right) \quad (10)$$

Setzen wir Formel 8 ein, so sehen wir, dass die Fixpunkte mit  $\hat{\phi}_n < \pi$  hyperbolisch sind und solche mit  $\hat{\phi}_n > \pi$  sind anziehend (bzw. elliptisch), falls

$$2n\pi(1-\alpha) < \gamma < 2\sqrt{n^2\pi^2(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^2} \quad , \quad (11)$$

und hyperbolisch, falls

$$\gamma > 2\sqrt{n^2\pi^2(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^2} \quad . \quad (12)$$

Hyperbolische Fixpunkte bei  $\hat{\phi}_n < \pi$  nennen wir *Sattel erster Art*, die zugehörigen Linearisierungen haben positive Eigenwerte  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , während wir hyperbolische Fixpunkte mit  $\hat{\phi}_n > \pi$  und negativen Eigenwerten *Sattel zweiter Art* nennen. Orbits nähern und entfernen sich von Satteln zweiter Art auf oszillierende Weise, solche Fixpunkte werden auch reflektiv hyperbolisch genannt ([1]). Die Punkte

$$\gamma_n = 2n\pi(1-\alpha) \quad , \quad \gamma'_n = 2\sqrt{n^2\pi^2(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2} \quad (13)$$

sind Verzweigungswerte. Bei  $\gamma_n$  entsteht ein Fixpunkt-Paar in einer Sattelknoten-Verzweigung, bei  $\gamma'_n$  tritt eine Flip-Verzweigung oder eine Periodenverdopplung, sowie ein Stabilitätswechsel, auf. Man kann direkt zeigen, dass für  $\gamma > \gamma'_n$  ein periodisches Orbit der Periode 2 existiert nahe dem Fixpunkt  $(\hat{\phi}_n > \pi, \hat{v}_n)$ . Dieses Orbit ist stabil, falls  $\gamma$  nahe genug an  $\gamma'_n$  ist und es entsteht sogar eine weitere Verzweigung zu einem Orbit der Periode 4. Dieser Prozess lässt sich so fortführen und wir erhalten einen Häufungspunkt  $\gamma_n^\infty$ , bei dem Orbits der Periode  $2^k$  für alle  $k$  existieren. Solche abzählbaren Sequenzen von Verzweigungen wurden zuerst bei eindimensionalen Abbildungen untersucht, in welchem Zusammenhang diese inzwischen recht gut verstanden werden, siehe dazu Arbeiten von [4], [3] oder Kapitel 6.8 im Buch von Guckenheimer und Holmes [8].

In Abbildung 1 zeigen wir ein Verzweigungsdiagramm für die ersten sechs ( $n = 0, \dots, 5$ ) Familien dieser Fixpunkte. In diesem Diagramm ist  $v = 2n\pi$  konstant und daher nicht eingezeichnet.

Anstatt weiter und weiter periodische Orbits höherer Ordnung zu diskutieren, deren Existenz sehr schnell sehr viel schwieriger nachzuweisen wäre, wollen wir ein Argument finden, welches uns die Existenz einer unendlichen Familie von periodischen Orbits liefert, dieses Argument wird uns sogar die Existenz einer Familie von beschränkten nicht-periodischen Orbits liefern. Davor sei jedoch noch angemerkt, dass Wood und Byrne [20] experimentell beobachtet haben,

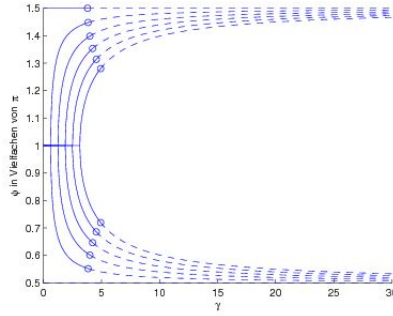


Abbildung 1: Verzweigungsdiagramm für Bewegungen der Periode 1,  $\alpha = 0,9$ . Bei  $\gamma = \gamma'_n$ , gekennzeichnet durch  $\circ$ , entstehen durch Verzweigung (stabile) periodische Orbits der Periode 2.

dass für kleines  $\gamma$ , also schwache Plattformoszillationen, stabile Orbits auftreten und für steigendes  $\gamma$  zunehmend nicht-periodische, augenscheinlich chaotische Bewegungen auftreten. Im Folgenden zeigen wir, dass solche Orbits für die Abbildung  $f$  aus 4 tatsächlich existieren, indem wir die Existenz der Hufeisenabbildung zeigen. Damit haben wir dann die Existenz einer unendlichen Familie periodischer Orbits sowie einer Familie von beschränkten nicht-periodischen Orbits.

Da die gesuchte Menge von globaler Natur ist, betrachten wir die globale Veränderung der Abbildung  $f$ , so dass wir eine abgeschlossene Menge  $Q \subset S^1 \times \mathbb{R}$  finden und das Bild  $f(Q)$  betrachten. Zur Vereinfachung betrachten wir den volumenerhaltenden Fall, d.h.  $\alpha = 1$ . Mit der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten gelten die Ergebnisse dann auch für  $\alpha$  nahe genug bei 1.  $Q$  sei definiert als das Parallelogramm  $ABCD$ , welches durch die Geraden  $\phi + v = 0$  ( $AB$ ),  $\phi + v = 2\pi$  ( $CD$ ),  $\phi = 0$  ( $AD$ ) und  $\phi = 2\pi$  ( $BC$ ) beschränkt ist.  $Q$  kann überdeckt werden durch die Familie von Geraden  $\phi + v = k$  mit  $k \in [0, 2\pi]$ , deren Bilder unter  $f$  senkrechte Linien  $\phi = k$ ,  $v \in [k - 2\pi - \gamma \cos k, k - \gamma \cos k]$  sind. Schliesslich sind die Bilder der Berandungen  $\phi = 0$  ( $AD$ ) und  $\phi = 2\pi$  ( $BC$ ) Kurven der Form  $v = \phi - \gamma \cos \phi$  ( $A'D'$ ) und  $v = \phi - 2\pi - \gamma \cos \phi$  ( $B'C'$ ). Das Parallelogramm  $Q$  kann in unserem Fall  $\alpha = 1$  wegen der modulo- $2\pi$ -Rechnung von  $\phi$  beliebig um ein Vielfaches von  $2\pi$  senkrecht verschoben werden, dementsprechend können auch die Ränder  $AD$  mit  $BC$  und  $AB$  mit  $CD$  identifiziert werden. In Abbildung 2 sind sowohl die Fläche  $Q$ , als auch die Fläche des Bildes  $f(Q)$  für (a)  $\gamma = 3\pi$  und (b)  $\gamma = 5\pi$ , dargestellt. Im Fall  $\alpha \neq 1$  unterscheiden sich solcherart verschobenen Streifen wegen des Terms  $\alpha v$  in Gleichung (4) (vgl. Abbildung 3).

Wählen wir  $\gamma$  groß genug, z.B.  $\gamma > 4\pi$ , schneidet das Bild  $f(Q)$   $Q$  in zwei disjunkten „senkrechten“ Streifen, einer davon,  $V$ , ist in Abbildung 2 (b) schraffiert dargestellt und ist das Bild von  $H$  unter  $f$ . Schematisch betrachtet haben wir also das in Abbildung 4 dargestellte Verhalten, wo  $f$  das Rechteck  $Q$  senkrecht streckt, horizontal zusammenpreßt, umbiegt und  $Q$  wieder schneidend wie abgebildet ersetzt. Das ist die Hufeisenabbildung, eine spätestens jetzt recht naheliegende Namensgebung. Tatsächlich ist das Vorhandensein der Hufeisenabbildung

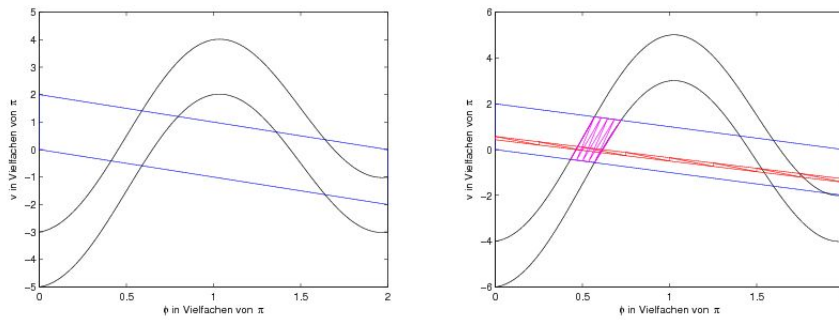


Abbildung 2: Bildung des Hufeisens für steigendes  $\gamma$  für den volumenerhaltenden Fall  $\alpha = 1$ . Die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  werden auf  $A', B', C'$  und  $D'$  abgebildet.  
 (a)  $\gamma = 3\pi$  (b)  $\gamma = 4\pi$

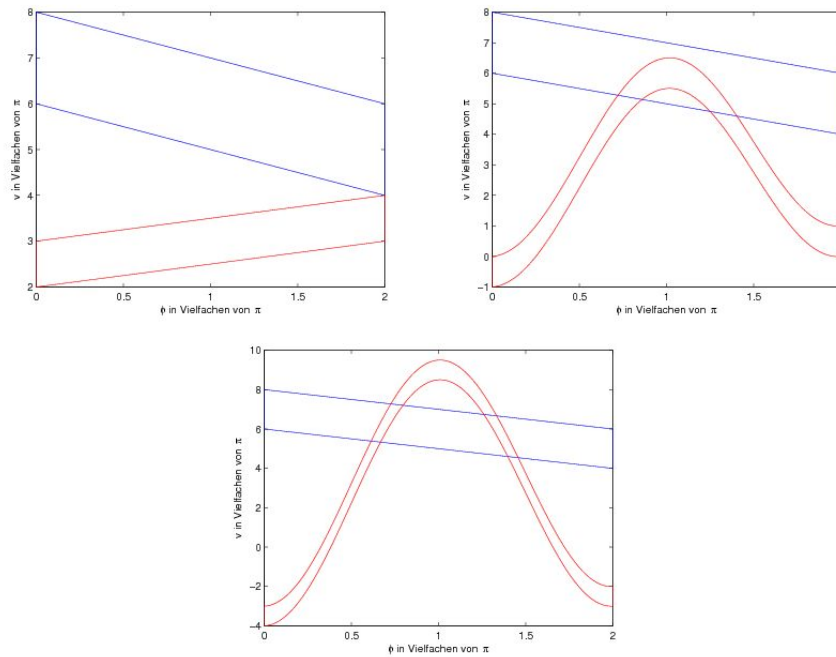


Abbildung 3: Bildung des Hufeisens für  $\alpha = 0,5$  und  $n = 3$ . (a)  $\gamma = 0$  (b)  $\gamma = 3\pi = \gamma_n$  (c)  $\gamma = 6\pi > \gamma_n^h$

im Wesentlichen gleichzusetzen mit dem, was einige Autoren mit „chaotischer Dynamik“ bezeichnen. Ein gutes Verständnis der Hufeisenabbildung ist daher essentiell für das Verständnis von komplexen Dynamiken. Im Detail wird die Hufeisenabbildung hier jedoch nicht diskutiert, da das ein eigenes späteres Seminarthema ist. Hier merken wir nur an, dass falls  $f$  einmal mehr iteriert wird, das Bild  $f(V)$  eines senkrechten Streifens selbst auch wieder ein schraffiertes

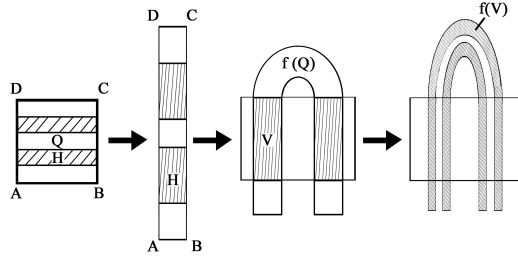


Abbildung 4: Die Hufeisenabbildung - Schematische Bildung des Hufeisens.

Hufeisen ist, das das Rechteck  $Q$  in zwei dünneren Streifen schneidet. Daher besteht die Menge

$$\Lambda_s^2 := Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$$

aus vier disjunkten senkrechten Streifen. Analoges erhalten wir mit den Urbildern; Die Menge

$$\Lambda_h^2 := Q \cap f^{-1}(Q) \cap f^{-2}(Q)$$

besteht aus vier disjunkten horizontalen Streifen. Generell bestehen die Mengen

$$\Lambda_s^n := \bigcap_{k=0}^n f^k(Q) \quad \text{und} \quad \Lambda_h^n := \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(Q)$$

aus  $2^n$  disjunkten senkrechten bzw. horizontalen Streifen, wobei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Grenzmengen

$$\Lambda_s^\infty := \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(Q) \quad \text{und} \quad \Lambda_h^\infty := \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(Q)$$

bestehen jeweils aus einer überabzählbaren Kollektion von senkrechten bzw. horizontalen Strecken, tatsächlich sind beides das Produkt einer Cantormenge mit einem Intervall.

Nun ist die Menge  $\Lambda := \Lambda_s^\infty \cap \Lambda_h^\infty = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(Q)$  die Menge aller Punkte  $p \in Q$ , die unter  $f$  vorwärts und rückwärts iteriert immer in  $Q$  bleiben.  $\Lambda$  ist also das Produkt zweier Cantormengen und daher selbst wieder eine Cantormenge, also eine perfekte, total unzusammenhängende, abgeschlossene Menge. Nun können wir folgenden Satz zeigen (vgl. [10]):

### Satz

Die invariante Menge  $\Lambda$  enthält:

1. Eine abzählbare Menge von periodischen Orbits aller Perioden,
2. eine überabzählbare Menge von nichtperiodischen Orbits,

3. ein dichtes Orbit und

4. die periodischen Orbits haben alle Sattelform und sind dicht in  $\Lambda$ .  
Darüber hinaus ist  $f|_{\Lambda}$  strukturell stabil.

Während die Menge  $\Lambda$  sehr kompliziert aufgebaut ist und überabzählbar viele nicht-periodischen bzw. chaotische Orbits enthält, ist sie kein Attraktor. Die Menge kann dennoch einen grossen Einfluß auf das Verhalten typischer Orbits, welche in der Nähe von  $\Lambda$  vorbeilaufen, ausüben, da ja die stabile Mannigfaltigkeit  $W^s(\Lambda)$  bzw. Menge von Orbits  $(f^n(q))_{n \in \mathbb{N}}$ , die sich  $\Lambda$  für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch annähern, verhalten wie eine überabzählbare Menge von Sattel-Separatrices. (Lokal ist diese stabile Mannigfaltigkeit gerade  $\Lambda_h^\infty$ , das Produkt eines Intervalls mit einer Cantormenge.) Man kann daher eine sehr empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsdaten erwarten für Orbits nahe  $\Lambda$ . Solche Orbits können sich vorübergehend chaotisch verhalten, ehe sie vielleicht doch noch zu einem periodischem Orbit werden, ähnlich wie bei der Duffing-Gleichung für bestimmte Parameterbereiche. Solche attraktiven Orbits können neben der Hufeisenabbildung existieren, da wir nur das Bild unter  $f$  für einen Bereich  $Q$  des Zustandsraumes betrachtet haben.

Wie bereits bei der Duffing-Gleichung betrachten wir nun das Verhalten der Abbildung  $f_{\alpha, \gamma}$ , während die Kraft  $\gamma$  erhöht wird für festes  $\alpha < 1$ . Dazu fixieren wir wieder eine durch  $\phi = 0$ ,  $\phi = 2\pi$ ,  $\phi + v = 2n\pi$  und  $\phi + v = 2(1n + 1)\pi$  begrenzte Menge  $Q$ , wobei  $n$  so gewählt sei, dass  $f_{\alpha, 0}(Q)$  vollständig unterhalb von  $Q$  liegt (vgl. Abbildung 3 (a)). Mit einer Erhöhung von  $\gamma$  steigt die Mitte des Bildes von  $Q$  bis das Bild der horizontalen Linie  $AC$  ( $v = 2\pi$ ), gegeben durch  $v = 2n\pi\alpha - \gamma \cos \phi$ , die Linie  $AC$  im Punkt  $(\phi, v) = (\pi, 2n\pi)$  berührt (vgl. Abbildung 3 (b)). Dies geschieht für  $\gamma = \gamma_n = 2n\pi(1 - \alpha)$  und ist der Verzweigungspunkt für das Fixpunktpaar, das bei  $v = 2n\pi$  liegt (vgl. (13)). Wir wissen bereits, dass der anziehende Fixpunkt zu einem Orbit der Periode 2 bei  $\gamma'_n = 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2}$  verzweigt. Wir können nun folgern, dass eine unendliche Sequenz von weiteren Verzweigungen zwischen  $\gamma'_n$  und  $\gamma_n^h$ , dem Kritischen Punkt, bei dem die Hufeisenabbildung gebildet wurde, auftreten muss, während für  $\gamma \geq \gamma_n^h$  in  $Q$  abzählbar viele periodische Orbits auftreten, einschließlich solcher von beliebig langer Periode.

Arbeiten von Newhouse ([13], [14] und [15]) und Gavrilov und Silnikov ([5] und [6]) implizieren, dass während sich die Hufeisenabbildung bildet, also  $\gamma_n < \gamma < \gamma_n^h$ , und das Bild  $f_{\alpha, \gamma}(Q)$   $Q$  noch nicht in zwei disjunkte Streifen schneidet, sich durch Verzweigungen unendlich viele Familien von stabilen periodischen Orbits bilden, deren Perioden sich mit steigendem  $\gamma$  wiederholt verdoppeln. Daher können stabile Orbits mit längeren Perioden als irgendwelche zuvor festgelegte Perioden gefunden werden. Solche Orbits sind in der Praxis nicht von beschränkten nicht-periodischen Orbits der Hufeisenabbildung unterscheidbar, aber dank ihrer Stabilität kann man sie verfolgen. Newhouse ([14]) hat vermutet, dass solche Orbits den hypothetischen „seltsamen Attraktor“ ausmachen, welcher von Henon ([9]) und vielen anderen in numerischen Iterationen von zweidimensionalen Abbildungen untersucht wurde.

Wir schliessen einmal mehr aus numerischen Beobachtungen, indem wir ein paar der komplizierten Orbits von  $f_{\alpha, \gamma}$  betrachten. In Abbildung 5 ist eine Sequenz von Orbits für festes  $\alpha = 0,8$  und variables  $\gamma$  gezeigt. Der stabile anziehende Fixpunkt von (a) verzweigt zu einem Orbit der Periode 2 in (b) und



wesentlich komplexere Orbits sind in (c) und (d) zu sehen. In allen Beispielen sind die Anfangswerte für  $v$  nahe  $2\pi$  gewählt. Das Orbit verlässt den Streifen  $Q$  für  $n = 1$  und wandert unvorhersagbar durch eine beschränkte Teilmenge des Zustandsraumes für grössere Werte von  $\gamma$ , ehe es zu einem stabilen Orbit wird (c), oder wandert scheinbar weiterhin umher (d), während das Orbit für kleinere Werte von  $\gamma$  nahe dem Streifen  $Q$  bleibt (a und b). In (c) wurden über 500 Iterationen benötigt, ehe das asymptotische Verhalten deutlich wurde, während in (d) selbst nach 50.000 Iterationen kein solches Verhalten zu erkennen ist. Die Tatsache, dass bei (c) und (d)  $v$  negativ wird, ist ein Manko unseres einfachen Modells und folgt aus der Annahme (2). Dies zeigt, dass (c) und (d) natürlich keine Bewegung eines springenden Balls beschreiben.

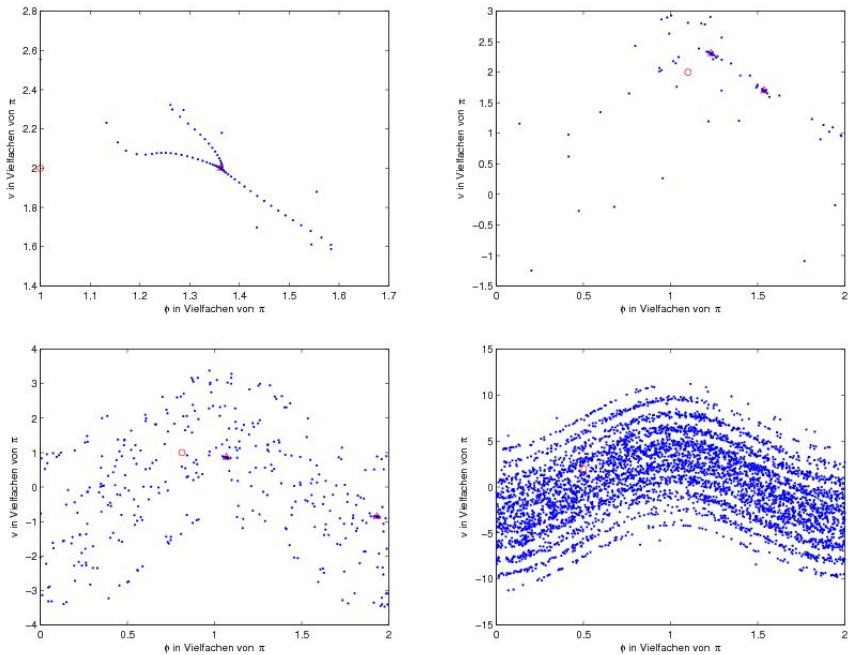


Abbildung 5: Orbits von  $f_{\alpha,\gamma}$  für  $\alpha = 0,8$ .  $\odot$  markiert den Anfangswert,  $\triangle$  markiert den asymptotischen Grenzwert des Orbits. Die Bewegung der Periode 2 für  $n = 1$  taucht für  $\gamma \approx 3,813022$  auf. (a)  $\gamma = 3$  (b)  $\gamma = 4$  (c)  $\gamma = 10$  (d) kein periodisches Verhalten erkennbar nach 50.000 Iterationen, abgebildet sind die ersten 5.000 Iterationen

In Abbildung 6 illustrieren wir die notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung, damit solches Wandern auftritt. Wir zeigen teilweise Beschränkungen des anziehenden Bereichs des anziehenden Fixpunktes für den  $n = 1$ -Streifen, welche durch die stabile Mannigfaltigkeit des zugehörigen Sattelpunktes gebildet werden. Endliche Segmente dieser Mannigfaltigkeit, darunter der Sattelpunkt, sind durch Iteration eines kleinen Intervalls um den stabilen Eigenvektor der Linearisierung (6) unter der Umkehrabbildung (5) zu finden. Die instabile Mannigfaltigkeit kann ähnlich gefunden werden, durch Iteration eines Intervalls um den instabilen Eigenvektor unter der Abbildung  $f$  ((4)). Existieren wie in Ab-

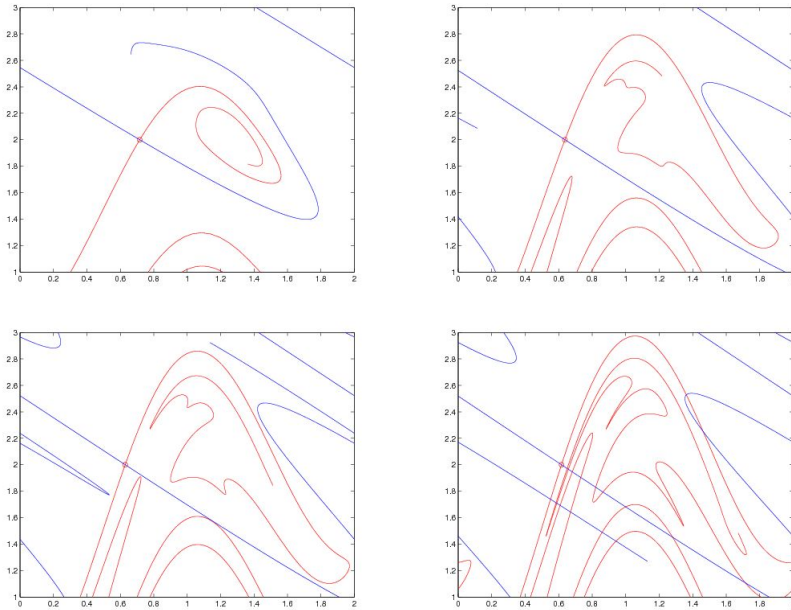


Abbildung 6: Stabile und instabile Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes für  $n = 1$ . Das Minimum für  $\alpha = 0,8$  und  $n = 1$  ist markiert durch  $\triangle$ . (a)  $\gamma = 2$  (b)  $\gamma = 3$  (c)  $\gamma = 3,28$ : Erste Tangente (d)  $\gamma = 3,5$ : transversale homokline Orbits

Abbildung 6 (d) transversale Schnitte von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit, ist es sehr schwierig, das asymptotische Verhalten eines Orbits vorherzusagen, sofern man nicht die Anfangsbedingungen extrem genau kennt, da zwei Orbits, die auf verschiedenen Seiten der stabilen Mannigfaltigkeit starten, letztendlich exponentiell auseinanderdriften. Das heftige schlängeln dieser Mannigfaltigkeit impliziert, dass der anziehende Bereich komplizierte Berandungen mit unendlich vielen langen „Zungen“ hat, die dicht zu anderen attraktiven Orbits hervorstößen. Einmal mehr können wir hier die sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten beobachten, obwohl einfache Attraktoren wie periodische Orbits letztendlich fast alle Lösungen einfangen.

Wie bereits bei dem Duffing- oder Lorenz-Beispiel gibt es hingegen beim gegebenen Problem große Bereiche von Parameterwerten, für die Orbits niemals asymptotisch zu periodischen Orbits sind. In Abbildung 7 (a) ist ein solches Orbit dargestellt, welches auch nach 200.000 Iterationen kein irgend wahrnehmbares asymptotisches Verhalten zeigt. Zu beachten ist jedoch, dass das Orbit ein auffälliges globales Verhalten hat, indem es wie beim Duffing-Beispiel auf eine Menge von Kurven fällt. Vergrößerungen des Phasenraumes lassen vermuten, dass wie in Henons Arbeit ([9]) diese Menge nicht endlich ist (Abbildung 7 (b)), wohl aber lokal das Produkt einer glatten Kurve mit einer Cantormenge ist. Und das ist präzise die Struktur des Abschlusses der instabilen Mannigfaltigkeit der Hufeisenabbildung. Lokal ist das gerade die Menge  $\Lambda_s^\infty \subset Q$ . In Abbildung 7 (c) ist ein Teil der instabilen Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes bei  $(\phi, v) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  dargestellt. Vergleichen wir das mit Abbildung 7 (a), so ist

klar, dass das Orbit auf dieser Mannigfaltigkeit liegt oder sich zumindest dieser annähert. Tatsächlich kann in diesem Fall, d.h.  $\alpha = 0,5$  und  $\gamma = 10$ , für die beschränkte Menge  $D = \{(\phi, v) \mid |v| < 8\pi\}$  mit Gleichung (7) gezeigt werden, dass  $f_{\alpha, \gamma}(D)$  in  $D$  enthalten ist und die Attraktor-Menge  $A$  wie beim Duffing-Beispiel als die Schnittmenge aller vorwärtsiterierten Bilder von  $D$  definiert werden kann:

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_{\alpha, \gamma}^n(D) \quad (14)$$

Wieder erscheint  $A$  als Abschluss einer instabilen Mannigfaltigkeit (vgl. Abbildung 7 (c)).

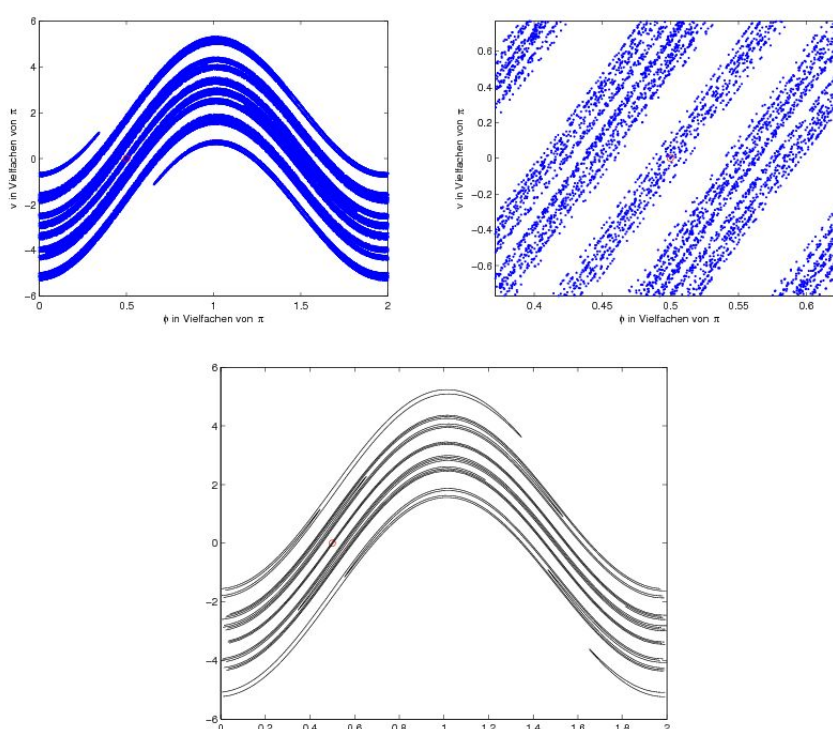


Abbildung 7: Der „seltsame Attraktor“. (a) 100.000 Iterationen eines Punktes nahe  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  (b) Vergrößerung eines Teils von (a) (c) Die instabile Mannigfaltigkeit des Punktes  $(\frac{\pi}{2}, 0)$

Zu beachten ist, dass dieser Attraktor mit einem stabilen Orbit der Periode 2 im  $n = 3$ -Streifen nahe dem Fixpunkt bei  $(\hat{\phi}, \hat{v}) = (\arccos(\frac{6\pi(\alpha-1)}{\gamma}), 6\pi)$  koexistiert (vgl. Abbildung 7 (a)). Der anziehende Bereich dieser Bewegung läuft in den Zwischenräumen der anderen anziehenden Mengen vor und zurück. Auf ganz ähnliche Art können auch beim Duffing-Beispiel zwei verschiedene Attraktoren für gleiche Parameterwerte beobachtet werden.

Diese Beobachtungen und die hier umrissene Analyse implizieren, dass wir beim physikalischen Problem erwarten können, fortwährende, beschränkte und

chaotische Bewegungen des Balles zu sehen, welche ihre mathematische Analogie in beschränkten nicht-periodischen Orbits haben, welche in  $v$  positiv bleiben. Solche Bewegungen wurden tatsächlich schon experimentell beobachtet (vgl. [20]).

## Die Standardabbildung

Wir betrachten nun den volumenerhaltenden Fall, d.h. setzen  $\alpha = 1$ . Daraus folgt sofort, dass Fixpunkte nur elliptisch oder hyperbolisch sein können. Die Volumenerhaltung von  $f_{\alpha,\gamma}$  für  $\alpha = 1$ , im folgenden nur noch als  $f_\gamma$  bezeichnet, ist auch Folgerung daraus, dass  $f_\gamma$  eine Hamiltonabbildung ist. Um dies zu zeigen, möchten wir kurz einiges zu Hamilton-Systemen wiederholen.

**Hamilton-Systeme** Ein Hamilton-System ist ein System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt} \quad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt} \quad (16)$$

wobei  $H(p(t), q(t), t)$  eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  ist, genannt Hamiltonsche Funktion. Der Freiheitsgrad eines Hamilton-Systems ist durch  $n$  definiert.

Man nennt ein Hamilton-System in  $n$  Freiheitsgraden *integrierbar*, falls es  $n$  linear unabhängige Funktionen  $f_i(p, q)$  gibt, so dass gilt:

$$\text{i } f_i(p(t), q(t)) = c \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii } \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial f_j}{\partial q} - \frac{\partial f_j}{\partial p} \frac{\partial f_i}{\partial q} = 0 \quad \forall i, j \in \{0 \dots n\}$$

Offensichtlich ist ii für  $n = 1$  erfüllt, so wie in diesem Fall auch die lineare Unabhängigkeit keine Schwierigkeiten bereitet.

Ein Beispiel sind zeitunabhängige Systeme in einem Freiheitsgrad, d.h.  $H(p, q)$  hängt nicht explizit von  $t$  ab, da hier  $H$  obige Voraussetzungen erfüllt. Eine *Hamiltonabbildung* ist der Lösungsfluss eines Hamiltonsystems zeitdiskret betrachtet, d.h.

$$\mathcal{M}_{t_0, T}(p_n, q_n) := (p_{n+1}, q_{n+1}) := c(t_0 + T) \quad (17)$$

wobei  $c$  eine Lösungskurve des zugehörigen Hamilton-Systems ist, für die  $c(t_0) = (p_n, q_n)$  gilt.

**$f_\gamma$  als Hamiltonabbildung** Sei die Hamiltonsche Funktion

$$H(v, \phi, t) := \frac{v^2}{2} + \gamma \sin \phi \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n) \quad (18)$$

gegeben, wobei  $\delta$  die Delta-Distribution darstellt, für die bekanntlich  $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)f(t)dt = f(0)$  für alle Funktionen  $f$  gilt. Dann ist

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma \cos \phi \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n) \quad (19)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = v \quad (20)$$

Für  $\gamma = 0$  ist  $\frac{dv}{dt} = 0$ , also  $f_0(v, \phi) = v$  konstante Funktion, das System ist integrierbar.  $f_\gamma$  ist außerdem eine Hamiltonabbildung zu obigem System, mit  $T = 0$  und  $t_o$  infinitesimal kurz nach dem Aufprallen des Balls auf dem Tisch,  $T$  und  $t_o$  wie aus (17). Damit ergibt sich durch integrieren von (20)

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{n+\epsilon}^{n+1+\epsilon} v dt = \phi_n + v_n$$

da  $v$  nach (19) zwischen zwei ganzen Zahlen konstant ist.<sup>1</sup> Integration von (19) liefert

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{n+\epsilon}^{n+1+\epsilon} \gamma \cos \phi \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(t - m) dt \\ &= v_n - \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{n+\epsilon}^{n+1+\epsilon} \gamma \cos \phi \cdot \delta(t - (n + 1)) dt \\ &= v_n - \gamma \cos \phi_{n+1} \end{aligned}$$

**KAM-Theorie** Für  $\gamma = 0$  reduziert sich  $f$  zu

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + v_n \\ v_{n+1} &= v_n \end{aligned}$$

es gibt also Mengen

$$\mathcal{C}_\omega^0 := \{(\phi, v) | v = \omega \in [0, 2\pi)\}$$

auf die eingeschränkt  $f$  gerade  $R_\omega$ , die Rotation um  $\omega$  ist. Sieht man sich in Abbildung 8 den Verlauf der Orbits unter  $f_\gamma$  an, so suggerieren die Numerischen Ergebnisse, dass es für  $\gamma$  nahe genug an 0 weiterhin  $f$ -invariante Kreise gibt, auf denen  $f$  konjugiert zur Rotation ist. Diese Suggestion ist nach der KAM-Theorie<sup>2</sup> hier richtig. Diese sagt aus, dass für leicht gestörte integrierbare Hamiltonabbildungen  $H = H_0 + \gamma H_p$ , unter der Voraussetzung, dass  $\gamma$  klein genug ist, und  $H_p$  genügend glatt ist, es für alle  $\omega \in [0, 2\pi)$  die der Ungleichung

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq C(\gamma) \frac{1}{q^{\frac{5}{2}}} \quad (21)$$

<sup>1</sup>Der springende Ball hat natürlich nicht zwischen zwei Stößen konstante Geschwindigkeit, es geht hier nur um den Formelbuchstaben  $v$  aus der Hamiltonschen Funktion. In [16] ist ein anderes physikalisches Modell, der 'kicked rotor', angegeben, für den die Gleichungen intuitiver wirken.

<sup>2</sup>benannt nach Kolmogorov, Arnold und Moser. Während Kolmogorov das zentrale Theorem erstmals 1954 formulierte, bewiesen es Moser für Twistabbildungen, Arnold für integrierbare Hamiltonsche Systeme in den 60er Jahren.

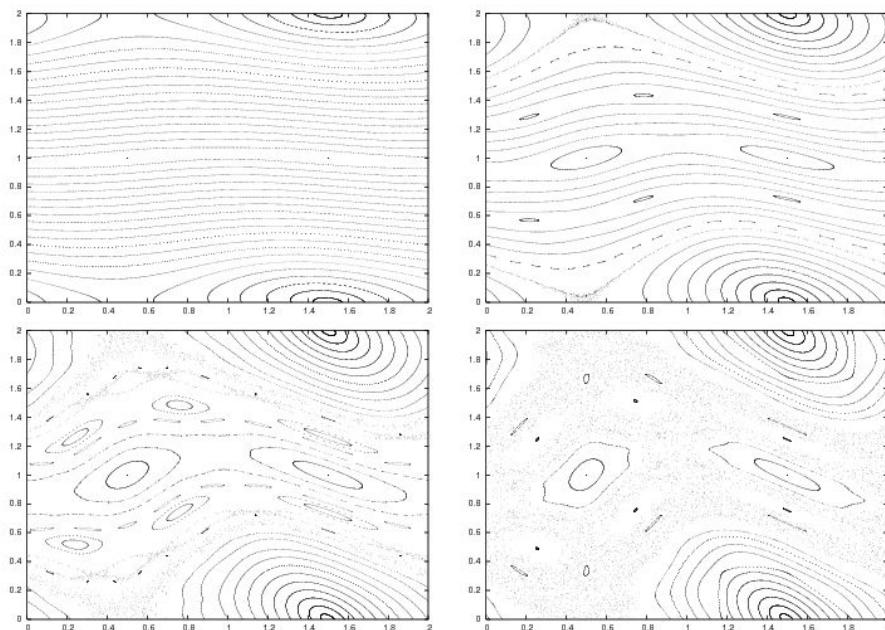


Abbildung 8: Die Orbits der Standardabbildung für  $\gamma = 0.2, 0.6, 0.97$  und  $1.2$ . Deutlich zu sehen sind die elliptischen und hyperbolischen periodischen Punkte. Die von links nach rechts durchgehenden Linien sind periodische Orbits mit hoher Periode. Sie sind nahe den KAM-Kurven. Im letzten Bild ist die goldene KAM-Kurve längst verschwunden und es gibt globale Stochastische Orbits.

für alle  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  mit  $\gcd(p, q) = 1$  genügen, wobei  $C$  im Falle der Standardabbildung stetig von  $\gamma$  abhängt und für  $\gamma = 0$  verschwindet, invariante Kurven der Form

$$C_\omega^\gamma := \{(\xi + F(\xi, \gamma), \omega + G(\xi, \gamma)) \mid \xi \in [0, 2\pi)\}$$

gibt, wobei  $F$  und  $G$  periodisch sind und für  $\gamma = 0$  verschwinden. Außerdem gilt

$$f_\gamma|_{C_\omega^\gamma} = R_\omega$$

mit  $R_\omega$  der Rotation um  $\omega$ , also

$$f(\xi + F(\xi, \gamma), \omega + G(\xi, \gamma)) = (\xi + \omega + F(\xi + \omega, \gamma), \xi + \omega + G(\xi + \omega, \gamma))$$

**Gibt es solche  $\omega$ ?** Man könnte sich nun fragen, wie viele Zahlen überhaupt bleiben, wenn man um jede rationale Zahl ein Intervall “ausschneidet”. Schließlich liegen die rationalen Zahlen ja dicht. Man kann aber leicht zeigen, dass tatsächlich Zahlen bleiben. Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden statt  $\frac{\omega}{2\pi}$  nur noch  $\bar{\omega}$ . Da mit dieser Notation  $\bar{\omega} \in [0, 1)$  ist, sind auch nur  $\frac{p}{q} \in [0, 1)$  relevant. Die aufsummierten Längen der “verbotenen” Intervalle sind endlich: Zu jedem  $q$  gebe es  $\varphi(q)$  teilerfremde Zahlen von 1 bis  $q$ . Dann ist

$$S := C(\gamma) \cdot \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{5}{2}}} \leq C(\gamma) \cdot \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} = C(\gamma) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

mit  $\zeta$  der Riemannsches  $\zeta$ -Funktion, die bekanntlich für  $\frac{3}{2}$  konvergiert. Wählt man also  $\gamma$  klein genug, so ist  $\mathcal{S} < 1$ .

**Wie findet man solche  $\omega$ ?** Sei

$$\bar{\omega} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (22)$$

die Kettenbruchentwicklung von  $\bar{\omega}$ , mit  $a_o \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i \in \mathbb{N}^*$ . Es ist bekannt, dass diese Darstellung für  $\bar{\omega} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  niemals abbricht, hingegen für  $\bar{\omega} \in \mathbb{Q}$  schon. Bricht man den Kettenbruch für irrationales  $\bar{\omega}$  ab, so ist die entstehende Zahl  $\bar{\omega}_n := [a_o, \dots, a_n] =: \frac{p}{q}$ ,  $\gcd(p, q) = 1$  bestapproximierend, im Sinne, dass

$$\left| \frac{p}{q} - \bar{\omega} \right| \leq \left| \frac{p'}{q'} - \bar{\omega} \right|$$

Für alle  $p', q'$  teilerfremd mit  $q' \leq q$ . Aus der Gleichung (22) erkennt man, dass  $[a_o, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots]$  gegen  $[a_o, \dots, a_n]$  konvergiert, wenn  $a_{n+1}$  gegen  $\infty$  geht. Es liegt also nahe, die  $a_i$  zu beschränken, um  $\bar{\omega}$  zu finden, welche der Ungleichung (21) genügen. Beschränkt man sie kleinstmöglich, erhält man die Zahl mit der Kettenbruchentwicklung  $[0, 1, 1, \dots] =: \omega^* = g - 1$  mit  $g$  dem goldenen Schnitt. Es wird vermutet (und ist numerisch belegt, siehe [7]), dass das Auftreten von Orbits, die sich nach keinem erkennbaren Muster verhalten, und den ganzen Zustandsraum füllen, eng mit dem verschwinden der goldenen KAM-Kurve<sup>3</sup> bei  $\gamma \approx 0.97$  zusammenhängt. Für solche Orbits stellt eine KAM-Kurve ein Hindernis dar, da wegen der Bijektivität und Stetigkeit von  $f_\gamma$  eine KAM-Kurve nicht überschritten werden kann. Das dieses Hindernis der einzige Grund ist, dass besagte Orbits nicht auftreten, ist natürlich nicht selbstverständlich.

**Was wird aus den rationalen Rotationszahlen?** Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst die Menge

$$\{(\phi, r) | f_\gamma^q(\phi, r) = (\phi, r'), r' \in [0, 2\pi)\}$$

also diejenigen Punkte, die nach  $q$  Iterationen wieder am gleichen Winkel stehen. Da  $f_0$  Twistabbildung ist, bildet  $f_\gamma^q$  für  $\gamma$  genügend klein, eine senkrechte Linie wie in Abbildung 9 auf eine Schraubenlinie ab, die sich  $q$ -Mal um den Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  windet, ab. Da  $f_\gamma^q$  stetig ist, erhalten wir, wenn wir  $\phi$  variieren also  $q$  Kurven. Jede dieser Kurven steht für eine Rotationszahl  $\frac{p}{q}$ . Betrachten wir wieder  $\frac{p}{q}$  gekürzt. Da es für genügend kleines  $\gamma$  KAM-Kurven gibt und  $f_\gamma^q$  volumenerhaltend ist, hat die zu  $\frac{p}{q}$  gehörige Kurve  $\Gamma$  mit ihrem Bild mindestens 2 Schnittpunkte. Diese sind  $q$ -periodische Punkte von  $f_\gamma$ . Die Bilder dieser Punkte sind natürlich auch periodisch, und so ergibt sich ein Bild wie etwa in Abbildung 10. Diese Fixpunkte sind abwechselnd hyperbolisch und elliptisch, wie man auch in Abbildung 8 erkennen kann. Es gibt also zu jeder Zahl  $q$  mindesten  $2q \cdot \varphi(q)$  Punkte mit kleinster Periode  $q$ .

<sup>3</sup>Die KAM-Kurve mit dem goldenen Schnitt als Rotationszahl

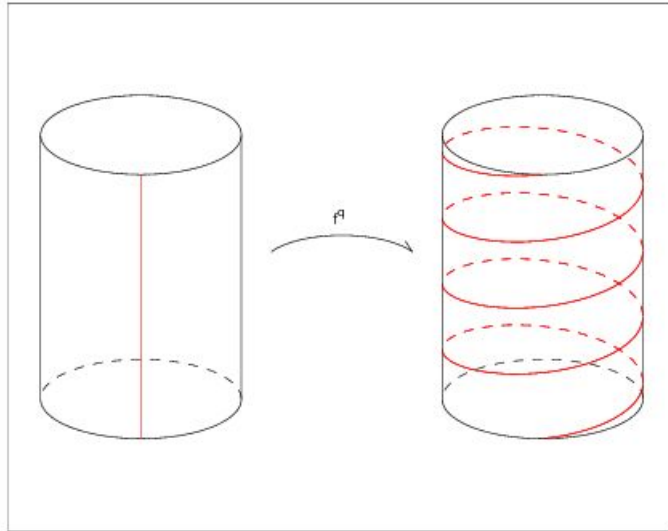


Abbildung 9:  $f^q$  ist eine Twistabbildung. Daher gibt es mindestens  $q$  Punkte  $(\phi, v)$ , die auf denselben Winkel  $\phi$  abgebildet werden.

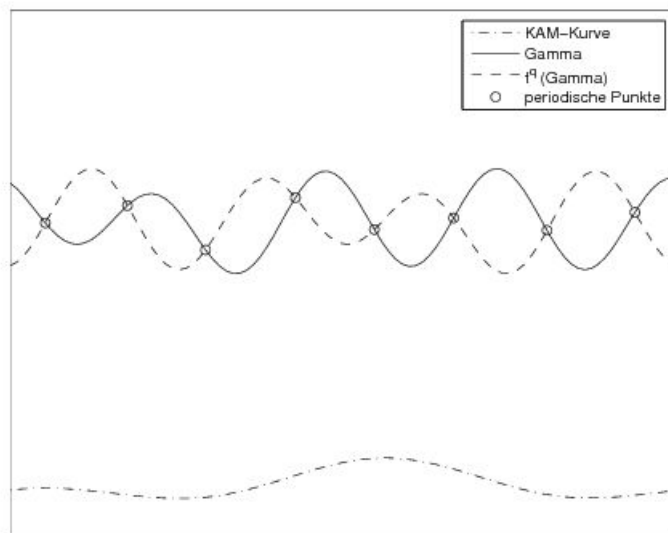


Abbildung 10: Da  $f^q$  volumenerhaltend ist, muss  $f(\Gamma)$  mit  $\Gamma$  Schnittpunkte haben.



# Literaturverzeichnis

- [1] J. Bernoussou, *Point Mapping Stability*, Pergamon: Oxford 1977
- [2] B. V. Chirikov, *A universal instability of many dimensional oscillator systems*, Phys. Rep., **52**, 263-379, 1979
- [3] P. Collet und J.-P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Progress on Physics, Vol. I. Birkhäuser-Boston: Boston 1980
- [4] M. J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys., **19**, 25-52, 1978
- [5] N. K. Gavrilov und L. P. Silnikov, *On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homocline curve*, I. Math. USSR Sb., **88**(4), 467-485, 1972
- [6] N. K. Gavrilov und L. P. Silnikov, *On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homocline curve*, II. Math. USSR Sb., **90**(1), 139-156, 1973
- [7] J. M. Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys., **20**(6), 1183-1201, 1979
- [8] J. Guckenheimer und P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sciences, **42**, 7. Aufl. Springer-Verlag: New York, Berlin, Heidelberg 2002
- [9] M. Henon and C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astron. J., **69**, 73, 1964
- [10] P. J. Holmes, *The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table*, J. Sound Vib., **84**, 173-189, 1982
- [11] A. J. Lichtenberg und M. A. Liebermann, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin 1982
- [12] J. L. Meriam, *Dynamics*, 2. Aufl. Wiley: New York 1975
- [13] S. E. Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology, **13**, 9-18, 1974
- [14] S. E. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. Math. IHES, **50**, 101-151, 1979

- [15] S. E. Newhouse, *Lectures on dynamical systems*, in Dynamical Systems, C.I.M.E. Lectures Bressanone, Italy, June 1978, 1-114. Progress in Mathematics, No. 8, Birkhäuser-Boston: Boston 1980
- [16] Edward Ott, *Chaos in dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1993
- [17] L. D. Pustyl'nikov S. E. Newhouse, *Stable and oscillating motions in non-autonomous dynamical systems*, Trans. Moscow. Math. Soc., **14**, 1-101, 1978
- [18] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, in Differential and Combinatorial Topology, S. S. Cairns (ed.), 63-80, Princeton University Press: Princeton 1963
- [19] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 747-817, 1967
- [20] L. A. Wood und K. P. Byrne, *Analysis of a random repeated impact process*, J. Sound Vib., **82**, 329-345, 1981