Wilde hyperbolische Mengen

Frank Bruder

16. Juli 2006

Grundlegendes

Es sei im Weiteren M immer eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Definition 1. Für eine r mal stetig differenzierbare Abbildung $f : M \to M$ sei

$$\|f\| := \sup\bigl\{\|\mathrm{D}^\alpha f(x)\|_\infty \quad \big| \quad |\alpha| \leq r, \quad x \in M\bigr\} \tag{1}$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ einen Multiindex nicht negativer ganzer Zahlen bezeichnet und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Dies ist eine Norm auf $\mathcal{C}^r(M)$ und heißt die *$\mathcal{C}^r$-Norm*.

Bei der betrachtung von $\mathcal{C}^r$-Diffeomorphismen werden wir im Folgenden immer die $\mathcal{C}^r$-Topologie zugrundelegen. Eine „kleine“ Störung ist eine $\mathcal{C}^r$-nahe Abbildung, die ebenfalls Diffeomorph ist.

Außerdem wird immer $r \geq 2$ angenommen.

Definition 2. Sei $f : M \to M$ ein diffeomorphismus. Ein periodischer Punkt p der Periode n von f heißt *dissipativ*, wenn $\bigl|\det\bigl(\mathrm{D} f^n(p)\bigr)\bigr| < 1$.

Ausgangssituation

Wir betrachten einen Diffeomorphismus $f : M \to M$ (z.B. eine Poincaré-Abbildung), der eine hyperbolische Menge Λ der Dimension Null besitzt. $\mathrm{W}^\mathrm{s}(\Lambda)$ und $\mathrm{W}^\mathrm{u}(\Lambda)$ sind lokal das Produkt einer Cantormenge mit einem Intervall.

Ferner nehmen wir an, es gebe einen Schnittpunkt tangentialer Berührung zwischen $\mathrm{W}^\mathrm{s}(\Lambda)$ und $\mathrm{W}^\mathrm{u}(\Lambda)$, d.h. einen punkt, den eine Kurve in $\mathrm{W}^\mathrm{u}(\Lambda)$ und eine Kurve in $\mathrm{W}^\mathrm{s}(\Lambda)$ durchlaufen und in dem diese Kurven die gleiche Tangente besitzen.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich kleine Störungen des Systems auswirken, durch die, wenn wir Abbildung 1 als Modell betrachten, die stabile Mannigfaltigkeit in vertikaler Richtung verschoben wird. (Lokal und bis auf Koordinatentransformationen sind das alle Störungen!)

Der spezielle Punkt tangentialer Berührung bleibt unter Störungen nicht erhalten. Und bei diskreten Mengen von Kurven wüssten wir, dass für hinreichend kleine Störungen auch keine neuen Tangentialschnitte entstehen. Wir werden aber sehen, dass dies bei Cantormengen u.U. nicht zutrifft.

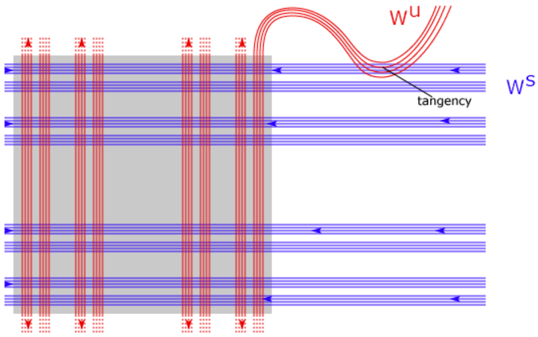

Abbildung 1: Tangentialberührung der stabilen und unstabilen Mannigfaltigkeiten

Dichte von Cantormengen

Wir können eine Cantormenge $\Gamma \subset \mathbb{R}$ schreiben als $\Gamma = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=-2}^{\infty} U_i$, sodass U_{-2}, U_{-1} die unbeschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R} \setminus \Gamma$ sind und die übrigen U_i paarweise disjunkte offene Intervalle.

Die U_i sind die *Lücken* von Γ und die Mengen $C_j := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=-2}^{j-1} U_i$ $(j \geq 0)$ sind eine *definierende Folge* von Γ.

Die Zusammenhangskomponenten von C_j sind abgeschlossene Intervalle, die wir *Brücken* nennen. Jedes U_j ist ein Teilintervall einer Brücke B_j von C_j und teilt diese in zwei Brücken B_j^{l} und B_j^{r} von C_{j+1}.

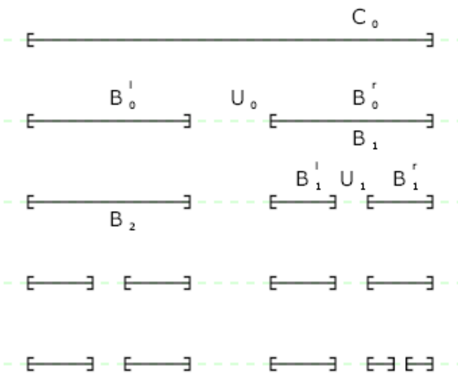

Abbildung 2: Definierende Folge einer Cantormenge

Wir bezeichnen die Länge eines Intervalls I mit $|I|$ und definieren:

$$\hat{\tau}(\{C_j\}) := \inf_{j>0} \left\{ \frac{|B_j^{\mathrm{l}}|}{|U_j|}, \frac{|B_j^{\mathrm{r}}|}{|U_j|} \right\} \tag{2}$$

Damit definieren wir die *Dichte* $\tau(\Gamma)$ von Γ durch

$$\tau(\Gamma) := \sup\big\{\hat{\tau}\big(\{C_j\}\big) \quad | \quad \{C_j\} \text{ ist definierende Folge von } \Gamma\big\} \tag{3}$$

Satz 1. *Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Cantormengen in $\mathbb{R}$. Ist*

$$\tau(\Gamma_1) \cdot \tau(\Gamma_2) > 1 \tag{4}$$

und liegt weder Γ_1 ganz in einer Lücke von Γ_2 noch Γ_2 ganz in einer Lücke von Γ_1, dann ist $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$.

Beweis. Wähle definierende Folgen $\{C_i\}$ von Γ_1, $\{D_i\}$ von Γ_2, so dass

$$\hat{\tau}\big(\{C_i\}\big) \cdot \hat{\tau}\big(\{D_i\}\big) > 1 \tag{5}$$

Es ist $C_0 \cap D_0 \neq \emptyset$, denn andernfalls läge Γ_1 in einer der unbeschränkten Lücken von Γ_2 und umgekehrt.

Wir zeigen induktiv, dass $C_i \cap D_i \neq \emptyset$ für alle $i \geq 0$. Da diese Mengen kompakt sind und $C_i \cap D_i \supset C_{i+1} \cap D_{i+1}$, folgt daraus $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$.

Sei $C_i \cap D_i \neq \emptyset$.

Seien B^1 und B^2 Brücken von C_i und D_i, so dass $B^1 \cap B^2 \neq \emptyset$. Sei $B^1 \setminus U_i = B^1 \cap C_{i+1}$ und $B^2 \setminus V_i = B^2 \cap D_{i+1}$. ($U_i$, V_i dürfen leer sein)

Es sind zwei Fälle zu betrachten:

I. $B^1 \subset B^2$ oder umgekehrt. Œ $B^1 \subset B^2$

Angenommen $(B^1 \setminus U_i) \cap (B^2 \setminus V_i) = \emptyset$.

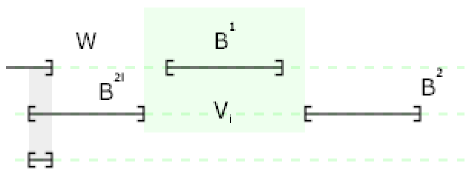

Abbildung 3: Fall 1

Dann ist $B^1 \subset V_i$ Für eine der Lücken W von C_i, die an B^1 grenzen (Œ sei es die Linke), gilt

$$\frac{|B^1|}{|W|} \geq \hat{\tau}\big(\{C_i\}\big) \tag{6}$$

und für die linke Komponente B^{2l} von $B^2 \setminus V_i$ gilt

$$\frac{|B^{2l}|}{|V_i|} \geq \hat{\tau}\big(\{D_i\}\big). \tag{7}$$

Daraus folgt

$$1 \quad < \quad \underbrace{\frac{|B^1|}{|V_i|}}_{<1} \cdot \frac{|B^{2l}|}{|W|} \quad < \quad \frac{|B^{2l}|}{|W|} \tag{8}$$

$$\implies \quad |W| < |B^{2l}| \tag{9}$$

$$\implies \quad (B^2 \setminus V_i) \cap (C_i \setminus B^1) \neq \emptyset. \tag{10}$$

also

$$D_{i+1} \cap C_{i+1} \neq \emptyset \tag{11}$$

II. $B^1 \setminus (B^1 \cap B^2) \neq \emptyset$ **und** $B^2 \setminus (B^1 \cap B^2) \neq \emptyset$. Œenthalte B^1 einen Punkt links von B^2.

Dann liegt der rechte Randpunkt von B^1 in B^2 und der linke Randpunkt von B^2 in $B1$.

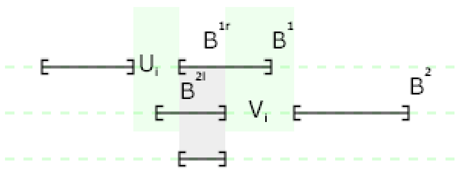

Abbildung 4: Fall 2

Sei $B^{1\mathrm{r}}$ die rechte Komponente von $B^1 \setminus U_i$ und $B^{2\mathrm{l}}$ die linke Komponente von $B^2 \setminus V_i$. Es gilt

$$\frac{|B^{1\mathrm{r}}|}{|U_i|} \geq \hat{\tau}(\{C_i\}) \tag{12}$$

$$\frac{|B^{2\mathrm{l}}|}{|V_i|} \geq \hat{\tau}(\{D_i\}) \tag{13}$$

$$\implies \frac{|B^{1\mathrm{r}}|}{|V_i|} \cdot \frac{|B^{2\mathrm{l}}|}{|U_i|} \geq 1 \tag{14}$$

Darum ist ausgeschlossen, dass $B^{1\mathrm{r}} \subset V_i$ und $B^{2\mathrm{l}} \subset U_i$.

Es folgt

$$(B^2 \setminus V_i) \cap (B^1 \setminus U_i) \neq \emptyset \quad . \tag{15}$$

□

Die stabile und die instabile Dichte

Zu $\mathrm{W^s}(\Lambda)$ und $\mathrm{W^u}(\Lambda)$ sind Dichten $\tau^{\mathrm{s}}(\Lambda)$, $\tau^{\mathrm{u}}(\Lambda)$ assoziiert, die wir nun definieren wollen:

Wähle $y \in \Lambda$ und eine Kurve γ transversal zu $\mathrm{W^u}(y)$ mit $\gamma(0) = y$. Wir definieren

$$\tau^{\mathrm{u}}(y, \gamma, \Lambda) = \inf_{\epsilon > 0} \sup \big\{ \tau(\Gamma) | \Gamma \text{ ist Cantormenge in } \gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)} \cap \mathrm{W^u}(\Lambda, f) \big\} \tag{16}$$

Newhouse [2] zeigt, dass $\tau^{\mathrm{u}}(y, \gamma, \Lambda)$ sowohl von γ als auch von y unabhängig ist. Somit können wir $\tau^{\mathrm{u}}(\Lambda)$ schreiben.

Zudem zeigt Newhouse, dass $\tau^{\mathrm{u}}(\Lambda) > 0$ ist und sich unter $\mathcal{C}^2$-Störungen von f stetig ändert.

Diese Definitionen und Sätze gelten analog für $\tau^{\mathrm{s}}(\Lambda)$.

Somit folgt aus Satz 1:

Folgerung 1. *Hat ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ eine hyperbolische Menge Λ mit*

$$\tau^s(\Lambda) \cdot \tau^u(\Lambda) > 1 \tag{17}$$

und gibt es einen tangentialen Schnittpunkt von $\mathrm{W}^s(\Lambda)$ und $\mathrm{W}^u(\Lambda)$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass alle $\mathcal{C}^2$ ϵ-Störungen von f hyperbolische Mengen nahe Λ besitzen, deren stabile und instabile Mannigfaltigkeit sich tangential schneiden.

Definition 3. Sei $f \in \operatorname{Diff}^r M$. Eine hyperbolische Menge Λ von f heißt *wild*, wenn es eine $\mathcal{C}^r$-Umgebung N von f gibt, sodass für alle $g \in N$ ein tangentialer Schnittpunkt zwischen $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(\Lambda(g))$ und $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(\Lambda(g))$ existiert.

Konstruktion wilder hyperbolischer Mengen

Weiter zeigt Newhouse, dass bei einem diffeomorphismus f, der eine homokline tangentialberührung zu einem dissipativen hyperbolischen Sattelpunkt p mit Eigenwerten $\rho < 1 < \lambda < \rho^{-1}$ besitzt, durch beliebig kleine Variationen wilde hyperbolische Mengen entstehen können.

Wir betrachten hierfür den Punkt t der „letzten" Tangentialberührung bevor ein Hufeisen entsteht, das p enthält. (s. Abbildung 5)

Es gebe einen Punkt q, in dem $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(p)$ und $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(p)$ sich transversal schneiden. Dies ist keine Einschränkung, da wir einen solchen durch störung von f nahe t erzeugen können. Dann gibt es eine hyperbolische Menge Λ_1 nahe dem Orbit von q, die von Smales Theorem beschrieben wird. Λ_1 hat eine instabile Dichte $\tau^{\mathrm{u}}(\Lambda_1)$, die unter Störungen von f annähernd konstant bleibt.

Nun wollen wir durch störung von f nahe t eine hyperbolische Menge Λ_2 schaffen mit

(1) $\tau^{\mathrm{s}}(\Lambda_2) \cdot \tau^{\mathrm{u}}(\Lambda_1) > 1$

(2) $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(\Lambda_2) \cap \mathrm{W}^{\mathrm{u}}(\Lambda_1)$ und $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(\Lambda_2) \cap \mathrm{W}^{\mathrm{s}}(\Lambda_1)$ besitzen transversale Schnitte außerhalb von $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

(3) $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(\Lambda_2)$ und $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(\Lambda_2)$ schneiden sich in einem Punkt tangential.

(1): Wir betrachten das Bild eines kleinen Rechteckes R, das an $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(p)$ anliegt, und um den Punkt t zentriert ist.

Für große n liegt $f^n(R)$ nahe an $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(p)$ und dehnt sich weit entlang $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(p)$ aus, wodurch es nahe an t kommt. Für $n \to \infty$ wollen wir $f^n(R_n)$ untersuchen, wobei $R_n \subset R$ ein Rechteck ist, dessen Bilder nahe an $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(p) \cap R$ liegen.

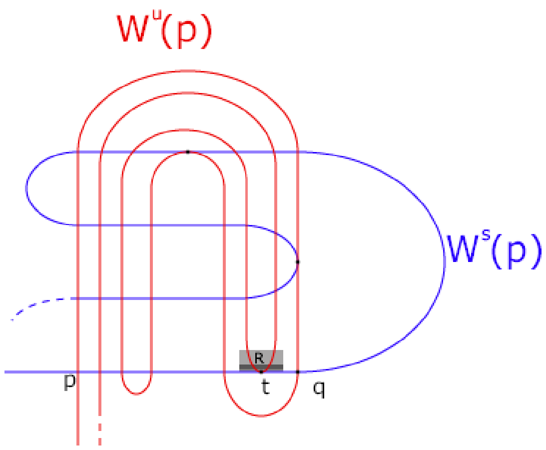

Abbildung 5: Homokline Tangentialberührung

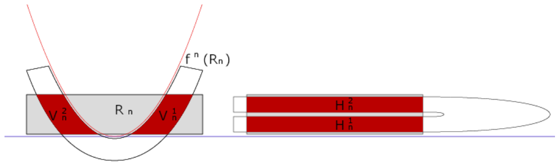

Abbildung 6: $f^n(R_n) \cap R_n$ und $f^{-1}(f^n(R_n) \cap R_n)$

R_n erstreckt sich entlang $\mathrm{W^s}(p)$ über die länge von R und hat eine zu $\mathrm{W^s}(p)$ normale ausdehnung proportional zu λ^{-n}. Die Breite von $f^n(R_n)$ in zu $\mathrm{W^u}(p)$ normaler Richtung sowie der Abstand zu $\mathrm{W^u}(p)$ sind proportional zu ρ^n. Die Breite von $f^n(R_n)$ relativ zur Höhe von R_n strebt also gegen Null, da $\rho\lambda < 1$.

Newhouse [2] zeigt für quadratische Tangentialberührungen (d.h. Schnittpunkt mit gleicher Tangente aber unterschiedlichen Krümmungen) durch sorgfältige Abschätzungen, dass man n, R_n so wählen kann, dass $f^{-n}\big(R_n \cap f^n(R_n)\big)$ zwei horizontale streifen sind, deren Höhen in der Summe beliebig nahe an die Höhe von R_n herankommen.

Daraus kann man folgern, dass f^n eine invariante Menge Λ^n mit großer stabiler Dichte besitzt. Um zu zeigen, dass Λ^n hyperbolisch ist, sind Sektorabschätzungen nötig, die dadurch erschwert werden, dass die Streifen $R^n \cap f^n(R_n)$ Ränder besitzen, die annähernd tangential an den Rand von R_n werden.

Dass eine quadratische Tangentialberührung vorausgesetzt wird, ist dabei keine Einschränkung. Dies kann durch beliebig kleine Störungen immer erreicht werden.

Guckenheimer und Holmes [1] geben eine alternative Konstruktion an. Dabei benutzen sie, dass für $n \to \infty$ f^n gegen eine grenzabbildung h von Rang 1 konvergiert, wenn wir die Koordinate normal zu $\mathrm{W^s}(p)$ nahe t mit λ^{-n} reskalieren.

Unter einer geeigneten Zusatzvoraussetzung, kann man nun zeigen, dass kleine Störungen von h hyperbolisch sind, und dass die stabile Dichte dabei beliebig groß wird.

Ferner zeigt man, dass sich diese Eigenschaften auf f^n übertragen für hinreichend große n.

für hinreichend große n kann man also eine Störung von f finden, sodass $f^n(R_n)$ eine hyperbolische Menge $\Lambda_2 \subset R_n$ von großer stabiler Dichte besitzt. Dabei können wir es auch einrichten, dass $\mathrm{W^s}(\Lambda_2)$ und $\mathrm{W^u}(\Lambda_1)$ sich tangential schneiden.

Damit erreichen wir Eigenschaft (1).

(2): In der Nähe von t liegen die Kurven in $\mathrm{W^u}(\Lambda_2)$ und $\mathrm{W^s}(\Lambda_2)$ nahe bei $\mathrm{W^u}(p)$ bzw. $\mathrm{W^s}(p)$. Da $p \in \Lambda_1$ ist und Λ_2 auf der gleichen Seite von $\mathrm{W^s}(p)$ liegt wie Λ_1, erhalten wir die geforderten transversalen Schnitte.

(3): Die Erzeugung von tangentialberührungen zwischen $\mathrm{W^s}(\Lambda_2)$ und $\mathrm{W^u}(\Lambda_2)$ können wir uns anhand von Abbildung 7 vorstellen als eine Störung, die das Bild

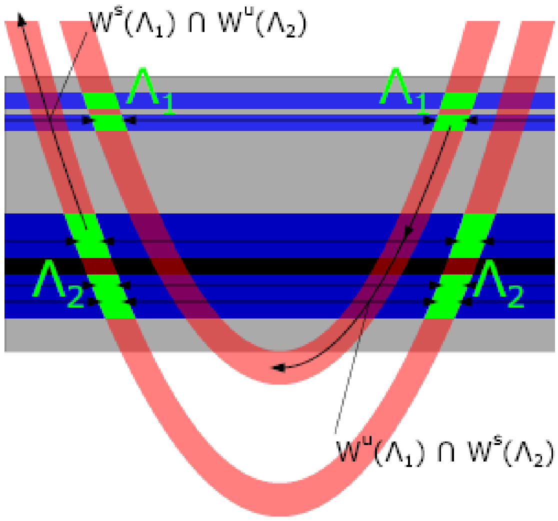

Abbildung 7: Das Auffinden transversaler Schnitte

$f^n(R)$ „hoch schiebt“.

Der nächste Schritt in der Konstruktion ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Smale [4, 5]. Unter Verwendung der transversalen Schnitte (2), finden wir eine hyperbolische Menge $\Lambda_3 \supset \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, für die $\tau^{\mathrm{s}}(\Lambda_3) \cdot \tau^{\mathrm{u}}(\Lambda_3) > 1$ gilt.

Folgerungen

Ein anderes Resultat, dass wir hier nicht beweisen wollen lautet:

Satz 2. *Sei p ein dissipativer periodischer Punkt von f_0, $o(p) := \{f^n(p)\}$ der Orbit von p, und es gebe einen tangentialen Schnittpunkt x von $\mathrm{W}^u(o(p))$ und $\mathrm{W}^s(o(p))$.*

Für jede Umgebung U von x und jede Umgebung N von f existiert ein Diffeomorphismus $g \in N$, der einen anziehenden periodischen Orbit $o(q)$ mit $q \in U$ besitzt.

Beweis. Siehe [3], Lemma 8.2. □

In verbindung mit der Konstruktion wilder hyperbolischer Mengen, liefert uns dies diffeomorphismen mit unendlich vielen anziehenden Orbits.

Dazu beginnen wir mit f_0 und stören zu einem nahen f_1 mit einer wilden Hyperbolischen Menge. Newhouse [3] zeigt, dass f_1 gestört werden kann zu einem f_2 mit einer tangentialen Berührung zwischen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines Punktes.

Er nutzt dafür die dichtheit von periodischen Orbits in Λ_3, um einen periodischen Orbit zu finden, der zwei Punkte nahe denen, deren stabile und instabile Mannigfaltigkeiten sich tangential schneiden, enthält.

Nun stört er f_2 zu einem nahen f_3 mit einem stabilen periodischen Orbit. Die wilde hyperbolische Menge Λ_3 wird bei der störung von f_1 zu f_3 nicht zerstört.

Es gibt also ein $\epsilon > 0$, so dass $\mathcal{C}^2$ ϵ-Störungen von f_3 einen stabilen periodischen Orbit und eine wilde hyperbolische Menge besitzen.

Durch Iteration mit fallendem ϵ bekommen wir unendlich viele anziehende periodische Orbits. Formulieren wir das Resultat in folgendem Satz.

Satz 3. *Sei p ein dissipativer hyperbolischer Sattelpunkt eines $\mathcal{C}^r$ diffeomorphismus f von M. Und es gebe einen punkt p_0, in dem $\mathrm{W}^u(p)$ und $\mathrm{W}^s(p)$ sich tangential schneiden.*

Dann gibt es beliebig $\mathcal{C}^r$ nahe f einen Diffeomorphismus $\tilde{f}$, der eine wilde hyperbolische Menge nahe dem Orbit von p_0 und unendlich viele stabile periodische Orbits besitzt.

Wenn wir nun Familien $\{f_\mu\}$ von Diffeomorphismen betrachten, die für einen Parameter μ_0 tangentialschnitte zwischen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines dissipativen Sattelpunktes (oder periodischen Orbits) besitzen, können wir damit rechnen, dass für Parameterwerte nahe μ_0 unendliche Mengen anziehender Orbits auftreten.

Es gibt einige Beispiele von Systemen, für die tangentialberührungen nachgewiesen werden können. So etwa in der Duffing-Gleichung.

In diesen Beispielen liefert die Newhouse-Konstruktion anziehende periodische Orbits von sehr großen Perioden aber mit sehr kleinen anziehungsgebieten. Darum sind solche Orbits vermutlich im Experiment unbeobachtbar und wahrscheinlich können auch numerisch nur ein paar solcher Orbits gefunden werden.

Literatur

[1] John Guckenheimer, Philip Holmes. „Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields“. Springer, 1983.

[2] S. E. Newhouse. „The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms“. Publ. Math. IHES, 50, 101-151

[3] S. E. Newhouse. „Lectures on dynamical systems“. In Dynamical Systems, C.I.M.E. Lectures Bressanone, Italy, June 1978, pp. 1-114. Progress in Mathematics, No. 8, Birkhauser-Boston: Boston.

[4] S. Smale. „Diffeomorphisms with many periodic points“. In Differential and Combinatorial Topology, S. S. Cairns (ed.), pp. 63-80. Princeton University Press: Princeton.

[5] S. Smale. „Differentiable dynamical systems“. Bull. Amer. Math. Soc., 73, 747-817.