

Merkwürdige und chaotische Attraktoren und deren Stabilität

Ann-Kristin Baum

Seminar Dynamische Systeme
SS 06

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Reale Vorgänge in den Natur- oder Gesellschaftswissenschaften, die durch dynamische Systeme beschrieben werden, entsprechen in den wenigsten Fällen der idealisierten Vorstellung eines abgeschlossenen, konservativen Systems; einerseits geht ihnen Energie durch Reibung, Material-, Temperaturverlust etc. verloren, andererseits wird ihnen durch äußere Anregung neue Energie zugeführt.

Dadurch haben die Anfangsbedingungen, unter denen der Vorgang startet, im Laufe der Zeit immer weniger Einfluß, d.h. das System pendelt sich für viele Anfangsbedingungen nach ausreichend langer Zeit in einem von den äußeren Einwirkungen bestimmten Gleichgewichtszustand ein. Die Menge des Phasenraums, die diesen Zustand beschreibt, heißt dann Attraktor.

Attraktoren einfacher Gestalt, wie anziehende Fixpunkte oder Grenzzyklen, haben wir bereits kennengelernt. Diese treten z.B. bei Systemen auf, die nur Energie verlieren.

Beispiel: das gedämpfte Pendel:

Egal von welcher Höhe und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit (Anfangsbedingungen) das Pendel losgelassen wird, verliert es durch Reibung Energie, bis es schließlich am tiefsten Punkt (attraktiver Fixpunkt) stehen bleibt.

Werden die Energieverluste durch eine äußere Kraft ausgeglichen, kann die Überlagerung von Anregung und Verlust schnell zu chaotischem Verhalten führen, daß auf den ersten Blick keinen ausgezeichneten Endzustand, also einen Attraktor, erkennen läßt.

Nähere Betrachtung ergibt aber, daß sich das System nach genügend langer Zeit trotz seines chaotischen Verhaltens auf eine bestimmte Menge des Phasenraums beschränkt. Dieser chaotische Endzustand ist dann ein chaotischer Attraktor.

Beispiel: das gedämpfte, angeregte Pendel:

Je nach Wahl der Antriebsgeschwindigkeit un-Frequenz hängt das Schwingverhalten empfindlich von den Anfangsbedingungen ab, und obwohl sich das Pendel für jede Starthöhe und -Geschwindigkeit nach dem Einschwingen auf bestimmte Zustände (Attraktor) beschränkt, bleibt diese Empfindlichkeit bestehen (chaot. Attraktor).

Im folgenden werde ich - nach einigen kurzen Definitionen - exemplarisch anhand der log. Abbildung auf die geometrisch besonderen "merkwürdigen" Attraktoren eingehen, um danach ausführlicher die Stabilität chaotischer Attraktoren zu behandeln. Dabei werde ich Intermittenz und Krisen von Attraktoren vorstellen und deren Auswirkungen auf das Verhalten von Orbits auf dem Attraktor.

Als durchlaufendes Beispiel verwende ich weiter die log. Abbildung, denn sie weist trotz ihrer recht einfachen Abbildungsvorschrift alle besprochenen Veränderungen eines Attraktors auf.

2 Definitionen

Im folgenden sei:

M Mannigfaltigkeit

$f : M \rightarrow M$ Diffeomorphismus

$\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ Fluß

2.1 Definition und Eigenschaften eines Attraktors

Anziehungsgebiet: $\bar{U} \subset M$ ist eine kompakte Teilmenge, für die gilt:

$$f(\bar{U}) \subset U \text{ bzw. } \Phi(\bar{U} \times \mathbb{R}^+) \subset U$$

d.h. alle Orbits / Trajektorien werden ins Innere von U gezogen und kommen dort auch nicht mehr heraus

Attraktor: $\Lambda \subset M$ kompakte Teilmenge, für die eine Umgebung $\bar{U} \subset M$ existiert, für die gilt:

1. \bar{U} Anziehungsgebiet

$$f(\bar{U}) \subset U \text{ bzw. } \Phi(\bar{U} \times \mathbb{R}^+) \subset U$$

2. $\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{U})$ bzw. $\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} \Phi^k(\bar{U} \times \mathbb{R}^+)$

d.h. die Punkte des Anziehungsgebiets U werden auf den Attraktor gezogen, auf dem sie dann für unendlich lange Zeit bleiben.

Eine äquivalente Formulierung eines Attraktors über die Limes-Menge lautet:

Attraktor: $\Lambda \subset M$ kompakte Teilmenge, invariant bezüglich f bzw. Φ ist ein Attraktor

\iff

\exists eine beliebig kleine Umgebung V von Λ , für die gilt:

1. V positiv invariant

$$f(V) \subset V \text{ bzw. } \Phi \subset V$$

2. $\omega(x) \subset \Lambda \forall x \in V$

Eigenschaft eines Attraktors Λ : Ist $x \in \Lambda$ ein hyperbolischer Punkt, dann gilt:

$$W^U(x) \subset \Lambda$$

der Attraktor enthält auch die instabile Mannigfaltigkeit seiner hyperbolischen Punkte

Arten von Attraktoren: Attraktoren können einerseits nach ihrer geometrischen Gestalt unterschieden werden:

- **stabiler Fixpunkt** p
- **Grenzyklus**, d.h. ein stabiles, periodisches Orbit $O(p)$ eines Punktes p
↔ in diesen Fällen hat der Attraktor eine einfache geometrische Gestalt
- in chaotischen Systemen kann der Attraktor jedoch eine viel kompliziertere Gestalt haben:
merkwürdiger Attraktor, d.h. ein Attraktor fraktaler Gestalt

andererseits nach dem Verhalten der auf ihm liegenden Orbits:

- **stabiler Fixpunkt** p
- **Grenzyklus**, d.h. ein stabiles, periodisches Orbit $O(p)$ eines Punktes p
↔ in diesen Fällen haben die Orbits nicht-chaotisches periodisches Verhalten
- in chaotischen Systemen ist die Abbildung oder der Fluß jedoch auch auf dem Attraktor chaotisch: **chaotischer Attraktor**

Erinnerung:

Eine Abbildung oder ein Fluß heißt auf einer Menge U chaotisch, wenn gilt:

1. f bzw. Φ sind topologisch transitiv auf U
2. alle periodischen Orbits sind dicht in U

3 Merkwürdige Attraktoren

Beispiel eines merkwürdigen Attraktors und dessen Entstehung anhand der Periodenverdopplung bei der logistischen Abbildung

log. Abbildung: $M(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$

$$x \in [0, 1], r \in [1, 4]$$

für diese Wahl von x, r ist die log. Abbildung selbstabbildend

Fixpunkte: $\bar{x}_1^1 = 0$, \bar{x}_1^1 instabil für $r \in [1, 4]$

$$\bar{x}_2^1 = 1 - \frac{1}{r}, \bar{x}_2^1 \text{ stabil für } r \in (1, 3)$$

da $M'(x) = -2 \cdot r \cdot x + r$, ist $M'(\bar{x}_2^1) = 2 - r$ und $M'(\bar{x}_2^1) = 2 - r < 1$ für $r \in (1, 3)$

↔ Was geschieht nun für $r > 3$?

↔ Hat die log. Abbildung dann nur noch abstoßende period. Orbits?

Dazu werden nun die 2-period. Punkte der log. Abbildung betrachtet, d.h. die Fixpunkte der 2-fachen Iteration:

$$M^2(x) = r^2 \cdot x \cdot (1 - x) \cdot [1 - r \cdot x \cdot (1 - x)]$$

$$\bar{x}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{r} \pm \sqrt{-3\frac{1}{r^2} - 2\frac{1}{r} + 1}\right)$$

$$\text{stabil für } r \in [3, 1 + \sqrt{6}]$$

Bei Überschreitung der Parameterwerts $r = 3$ findet also eine Pitchfork-Bifurkation statt.

denn:

Die log. Abbildung hat für $r < 3$ in den Fixpunkten die Steigung $M'(\bar{x}_2^1) < -1$,

für $r = 3$ ist sie $M'(\bar{x}_2^1) = -1$, und für $r > 3$ ist $M'(\bar{x}_2^1) > -1$,

dieser Fixpunkt wird also instabil.

Betrachtet man aber nun $M^2(x)$, erkennt man, dass 2 2-period. Punkte entstehen, die für $r \in [3, 1 + \sqrt{6}]$ stabil sind.

↔ Was geschieht nun für $r > 1 + \sqrt{6}$?

$\bar{x}_{1,2}^2$ passiert das gleiche wie $\bar{x}_{1,2}^1$ bei $r > 3$; sie werden instabil, dafür entstehen aber jeweils 2 neue, nun 4-period. Orbits, die für ein kleines Intervall im Parameterraum stabil sind.

⇒ So entstehen in Abhängigkeit des Parameters r 2^n stabile Orbits der Periode 2^n .

D.h. der Attraktor verändert sich mit dem Parameter von einem einzigen, anziehenden Fixpunkt zu einer Menge von 2^n 2^n -period., anziehenden Orbits.

Dieses Phänomen bezeichnet man als **Periodenverdopplung**.

↔ **Wo ist nun der fraktale Attraktor?**

Um den Parameterwert r_f zu bestimmen, für den die log. Abbildung einen fraktalen Attraktor hat, werden die Intervalle $[r_{n-1}, r_n]$ betrachtet, in denen jeweils 2^n -period, stabile Orbits existieren.

Feigenbaum zeigte, dass die Folge der Längenverhältnisse $\left(\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \right)_n$ dieser Intervalle konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \right) = \hat{\delta} \approx 4,6692... \text{ Feigenbaum-Konstante}$$

Das bedeutet also, dass die Periodenverdopplung bezogen auf die Parameterveränderung immer rascher auftritt, bis schließlich bei

$$r_f = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \approx 3,5699...$$

der Attraktor aus 2^∞ Punkten besteht, und die Hausdorff-Dimension ¹

$$d^H = 0,538$$

besitzt, und damit ein Fraktal ist.

Der Ljapunov-Exponent für dieses r_f ist 0, es handelt sich also um einen nicht-chaotischen, fraktalen Attraktor.

¹gezeigt von Grassberger, 1981

Bemerkung zur Feigenbaum-Konstante: Feigenbaum gelang es zu zeigen, daß diese Zahl nicht nur für die log. Abbildung den Grenzwert der Folge der Längenverhältnisse $\left(\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}\right)_n$ bildet, sondern daß für jedes System f der Dimension m mit folgenden Voraussetzungen:

1. $f(x)$ ist stetig
2. $f([0, 1]^m) \in [0, 1]^m$
3. f hat quadratisches Maximum, d.h. $f''(x_{max}) \neq 0$

gilt:

Tritt eine Periodenverdopplungs-Kaskade auf, konvergiert das Verhältnis der Abstände zwischen den Verdopplungen gegen die Feigenbaum-Konstante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \right) = \hat{\delta} \approx 4,6692... \text{Feigenbaum - Konstante}$$

Durch die Universalität dieser Zahl wird ihr eine Bedeutung für die Chaostheorie zugeschrieben, wie π sie in der Geometrie hat. Es besteht auch die Vermutung, daß $\hat{\delta}$ transzendent ist, der Beweis dafür steht aber noch aus.

↔ Ist r_f der einzige Parameterwert, für den die log. Abbildung einen fraktalen Attraktor hat?

Um diese Frage zu beantworten sowie als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt über Stabilität chaot. Attraktoren, betrachten wir das Bifurkationsdiagramm der log. Abbildung.

In diesem ist für zunehmendes r folgendes zu beobachten:

Nach der Perioden-Verdopplungskaskade verschmilzt der fraktale, nicht-chaotische Attraktor nach und nach zu Bändern, deren Anzahl so abnimmt wie die der stabilen Orbits in der Periodenverdopplung zunimmt. Sind also bei dieser aus 2^n anziehenden, period. Orbits 2^{n+1} geworden, werden hier aus 2^{n+1} attraktiven Bändern 2^n , bis für $r = r_B$ das Band ein großes Intervall ausfüllt.

Betrachtet man von dort ausgehend das wieder Längenverhältnis $\left(\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}\right)_n$ der Bänderverschmelzung für *abnehmendes* r , konvergiert die Folge wieder gegen die Feigenbaum-Konstante!

Schaut man noch genauer auf das Bifurkationsdiagramm, sieht man nach der Periode-2-Kaskade, also in dem Bereich des Parameterraums $(r_F, 4]$, weitere period. Abschnitte verschiedenster Periode. Dies sind wieder Perioden-Verdopplungskaskaden, die auch wieder in einem fraktalen, nicht-chaotischen Attraktor enden.

Z.B. 3-period. Kaskade zwischen $r = 3,8$ und $r = 3,9$.

Es läßt sich zeigen, daß in dem Intervall $(r_F, 4]$ des Parameterraums beliebig viele solcher Kaskaden beliebiger Periode zu finden sind, d.h. die log. Abbildung hat für unendlich viele Parameterwerte einen merkwürdigen Attraktor.

Diese merkwürdigen Attraktoren verschmelzen für zunehmendes r ebenfalls sukzessiv zu Bändern. Dieser Bereich des Bifurkationsdiagramms ist dabei eine Kopie des "großen" Bifurkationsdiagramms, d.h. er enthält wiederum Verdopplungskaskaden, die dann ja auch wieder welche enthalten, usw.

→ Das Bifurkationsdiagramm der log. Abbildung enthält unendlich viele fraktale Attraktoren und ist selber selbstähnlich!

Der Bereich des Parameterraums von Beginn einer Periode- n -Kaskade bis zu dem r , an dem der Attraktor nur noch ein Band ist, heißt *Periode- n -Fenster*. Diese Fenster liegen dicht im Parameterraum, d.h. beliebig dicht neben jedem r , für das es chaotische Orbits gibt, existiert ein anderes r , das zu einem Fenster gehört. Trotzdem ist chaotisches Verhalten für die log. Abbildung typisch, denn das Lebesgue-Maß der r , für die der Attraktor nicht-chaotisch ist, ist 0.

Auf die Gründe für die Veränderung des Attraktors zu Beginn und Ende eines Fensters komme ich im nächsten Abschnitt zu sprechen.

4 Stabilität von Attraktoren

Bisher haben wir hauptsächlich die Stabilität von Attraktoren mit nicht-chaotischem, period. Verhalten betrachtet:

- **Fixpunkte bzw. period. Orbits:**
 - **Hyperbolisch:** stetige Abhängigkeit von der Parameterveränderung
 - **Nicht hyperbolisch:** Bifurkationen, wie z.T. von Jerry besprochen

↔ **Wie verhalten sich chaotische Attraktoren bei stetiger Veränderung eines skalaren Systemparameters?**

Um diese Frage zu beantworten, werde ich zunächst den Fall des schrittweisen Wandels eines anziehenden, period. Orbits zu einem chaotischen Attraktor - Intermittenz - vorstellen und danach die Krisen von Attraktoren, die eine plötzliche Vergrößerung bzw. Zerstörung eines chaotischen Attraktors darstellen.

4.1 Intermittenz

Betrachtet wird ein vom Parameter p abhängiges Dynamisches System, das für $p < p_c$ ein stabiles, periodisches Orbit als Attraktor besitzt.

Wird p nun kontinuierlich von $p < p_c$ bis $p > p_c$ vergrößert, verändert sich der Attraktor im Intermittenzfall folgendermaßen:

Sobald p_c überschritten wird, treten in den vorher regelmäßigen, periodischen Orbits des Attraktor sogenannte "Ausbrüche" auf. D.h. die Orbits nehmen lange Zeit nahezu die selben Werte an wie für $p < p_c$, bis sie sich plötzlich weit von diesen Werten entfernen, um aber nach vergleichsweise kurzer (endlicher!) Zeit zu ihrem vorherigen, pseudo-periodischen Verhalten zurück zu kehren. Je weiter p p_c überschreitet, desto häufiger erfolgen diese "Ausbrüche", bis irgendwann zwischen diesen kein regelmäßiges Verhalten mehr auszumachen ist.

⇒ **Intermittenz ist die stetige Veränderung eines periodischen Orbits zu einem chaotischen Attraktor, d.h. dem Dynamischen System bleibt bei Störungen ein Attraktorerhalten, dessen Größe und Verhalten der Orbits sich allerdings schrittweise ändern.**

Dabei ist die obige Annahme, dass der Wandel zum Chaos bei Vergrößerung des Parameters erfolgt, willkürlich getroffen; je nach System kann Chaos natürlich auch bei Verkleinerung des Parameters entstehen.

Voraussetzungen für Intermittenz:

Da bei Intermittenz ein stabiles, periodisches Orbit durch einen chaotischen Attraktor ersetzt wird, kommen nur Bifurkationen als Intermittenz auslöser in Frage, die stabile, periodische Orbits durch instabile periodische Orbits ersetzen oder die Periodizität vollständig zerstören.

Die folgenden 3 generischen Bifurkationen erfüllen diese Voraussetzungen:

1. **Sattel-Knoten-Bifurkation**

Ein instabiles und ein stabiles Orbit fallen zu einem instabilen zusammen

2. **Inverse Pitchfork-Bifurkation**

Ein instabilen Orbit mit Periode $2n$ und ein stabiles Orbit der Periode n fallen zu einem instabilen Orbit der Periode n zusammen

3. **Subkritische Hopf-Bifurkation** Ein stabiles Orbit fällt mit einem instabilen Grenzyklus zusammen.

Die Voraussetzungen für das Auftreten dieser Bifurkationen wurden in dem Vortrag von Herrn Lauterbach bereits besprochen.

Ich möchte deshalb jetzt lieber noch etwas auf das Verhalten der Orbits bei Intermittenz eingehen, nämlich auf die Dauer zwischen den Ausbrüchen und deren Abhängigkeit vom Parameter p .

Da es für viele Dynamische Systeme sehr schwer werden kann, konkrete Orbits zu berechnen, für die dann die Dauer des pseudo-periodischen Verhaltens bestimmt werden kann, begnügt man sich damit, nur einen Durchschnittswert anzugeben: \bar{T}

Diese Durchschnittsdauer \bar{T} beruht auf einer Verteilung $P(\langle \bar{T} \rangle)$ der charakteristischen Zeit $\langle \bar{T} \rangle$, die jedes Orbit mit pseudo-periodischem Verhalten verbringt.

Für die oben genannten generischen Bifurkationen besteht diese Abhängigkeit in überraschend einfacher Form:

1. **Sattel-Knoten-Bifurkation**

$$(p - p_T)^{-\frac{1}{2}}$$

2. **Inverse Pitchfork-Bifurkation**

$$(p - p_T)^{-1}$$

3. **Subkritische Hopf-Bifurkation**

$$(p - p_T)^{-1}$$

Obwohl die Skalierung der Durchschnittszeit \overline{T} für die Inverse Pitchfork-Bifurkation und die Subkritische Hopf-Bifurkation gleich ist, ist die Verteilung der charakteristischen Zeit $\langle \overline{T} \rangle$ sehr unterschiedlich!

Beispiel: Entstehung eines period. Fensters bei der log. Abbildung

Das stabile n -period.Orbit, das den Beginn eines Periode- n -Fensters markiert, entsteht durch eine Sattel-Knoten-Bifurkation bei dem Parameterwert $r_{FensterStart}$

Vor dieser Bifurkation existierte ein chaotischer Attraktor; die Voraussetzungen für das Auftreten von Intermittenz sind also gegeben.

Und tatsächlich läßt sich bei Verkleinerung von r durch $r_{FensterStart}$ beobachten, daß die Orbits auf dem chaotischen Attraktor für r nahe bei $r_{FensterStart}$ lange Zeit n -period. Verhalten, unterbrochen von einzelnen, kurzen "Ausbrüchen", aufweisen.

4.2 Krisen von Attraktoren

Im folgenden sei mit Attraktor immer ein chaotischer Attraktor gemeint.

Im Gegensatz zum relativ stetigen Wandel bei Intermittenz unterläuft der Attraktor bei einer Krise einer plötzliche, un stetige Änderung, die folgende Gestalt haben kann:

1. Verschwinden bzw. Kreation des gesamten Attraktors
↔ **Randkrise**
2. Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Attraktors
↔ **Innere Krise**
3. Verschmelzung bzw. Teilung zweier bzw. eines Attraktors
↔ **Mischungskrise**

Gründe für diese Krisen:

Die Parameterveränderung bewirkt die Überschneidung des Attraktors mit der stabilen Mannigfaltigkeit eines instabilen, hyperbolischen, periodischen Orbits. Dadurch geht entweder die Attraktivität verloren oder die Orbits des Attraktors bekommen Zugang zu neuen Werten (bzw. es entsteht erst Attraktivität oder es spaltet sich ein solches instabiles Orbit von einem Attraktor ab, so dass dessen Orbits auf einen kleineren Wertebereich eingeschränkt werden)

Je nach Lage dieses instabilen Orbits werden die oben aufgeführten Fälle unterschieden:

1. **Randkrise**

Das Randgebiet des Attraktors enthält ein instabiles, hyperbolisches, periodisches Orbit und ist Abschluß dessen stabiler Mannigfaltigkeit; die instabile Mannigfaltigkeit liegt jedoch zum Teil im Anziehungsgebiet des Attraktors

2. **Innere Krise**

Das Anziehungsgebiet enthält neben dem Attraktor ein instabiles, hyperbolisches, periodisches Orbit

3. **Mischungskrise**

Das Randgebiet zwischen zwei Anziehungsgebieten zweier Attraktoren enthält ein instabiles, hyperbolisches, periodisches Orbit und ist Abschluß dessen stabiler Mannigfaltigkeit; die instabile Mannigfaltigkeit liegt jedoch zum Teil in beiden Anziehungsgebieten

Bemerkung :

Da sich bei einer Krise eine ganze Menge des Phasenraums, nämlich der Attraktor und dessen Umgebung, verändert, anstatt nur eine kleine Umgebung eines Punktes, handelt es sich hier um globale Bifurkationen.

Im folgenden werde ich auf den genauen Ablauf einer Krise und deren Auswirkungen auf das Verhalten der Orbits, insbesondere deren charakteristische Lebensdauer auf dem ehemaligen Attraktor, eingehen.

OE werde ich aus Formulierungsgründen davon ausgehen, daß bei Vergrößerung des Parameters p über einen kritischen Wert p_c ein Attraktor zerstört oder größer wird oder zwei Attraktoren zu einem zusammen fallen.

4.2.1 Randkrise

In diesem Fall enthält das Randgebiet des Attraktors ein instabiles, hyperbolisches, periodisches Orbit und ist Abschluß dessen stabiler Mannigfaltigkeit; die instabile Mannigfaltigkeit liegt jedoch zum Teil im Anziehungsgebiet des Attraktors.

Durch stetige Parameterveränderung bewegen sich Attraktor und Randgebiet nun aufeinander zu, bis sie sich für den kritischen Wert $p = p_c$ berühren und bei weiterer Erhöhung von p immer weiter überschneiden. Diese Menge gemeinsamer Punkte heißt "Leck".

Für die Punkte des früheren Anziehungsgebiets resultiert daraus:

Wie vor der Krise werden ihre Orbits auf den Attraktor gezogen; dort bleiben sie solange, bis sie auf das "Leck" treffen. Von diesem werden sie auf der stabilen Mannigfaltigkeit zu dem periodischen Orbit gezogen, um von dort dessen instabiler Mannigfaltigkeit in den übrigen Phasenraum - weg vom Attraktor - zu folgen.

Dieses Verhalten, bei dem ein Orbit innerhalb eines eingeschränkten Gebiets erst lange Zeit chaotisch ist, es dann aber für immer verläßt, da es entweder divergiert oder von einem Attraktor angezogen wird, heißt **vorübergehend chaotisch**.

⇒ Der ehemalige chaotische Attraktor verliert also seine Eigenschaft, angezogene Orbits für alle Zeiten auf sich zu behalten, bleibt aber eine chaotische Menge und in einer kleinen Umgebung (dem ehemaligen Anziehungsgebiet) auch anziehend.

Eine solche Menge bezeichnet man als **nicht-attraktive, chaotische Menge**.

Von Interesse ist nun die Dauer, die ein Orbit auf dieser nichtattraktiven chaotischen Menge verbringt; **die charakteristische Lebensdauer $\langle \tau \rangle$:**

Die Dauer τ , die ein einzelnes Orbit auf dem ehemaligen Attraktor verbringt, hängt natürlich stark vom Startpunkt und vom Dynamischen System ab. Um eine allgemeinere Aussage treffen zu können, wird stattdessen wieder eine Verteilung $P(\tau)$ dieser Zeit aufgestellt.

Dazu wird in dem früheren Anziehungsgebiet über eine gleichmäßige Verteilung eine große Anzahl $N(0)$ von Anfangsbedingungen ausgewählt. $N(\tau)$ gibt dann die Anzahl der

Orbits an, die nach der Zeit τ immer noch chaotisch sind, sich also auf dem ehemaligen Attraktor befinden.

Diese Anzahl $N(\tau)$ fällt typischerweise exponentiell ab:

$$N(\tau) \approx \exp(-\tau / \langle \tau \rangle) \text{ für große } \tau$$

Über diese Verteilung kann nun für einen zufällig ausgewählten Startwert die wahrscheinliche Zeit, die dieser auf dem ehemaligen Attraktor verbringt, angegeben werden.

Außerdem kann darüber auch die Anzahl der Orbits, die in einem kleinen Zeitintervall $[\tau + d\tau]$ den Attraktor verlassen, bestimmt werden:

$$P(\tau) = dN(\tau)/d\tau \approx \exp(-\tau / \langle \tau \rangle)$$

Die charakteristische Lebenszeit $\langle \tau \rangle$ kann sehr groß sein, so daß Orbits, die eigentlich vorübergehend chaotisch sind, aufgrund der in der Praxis nur begrenzt zur Verfügung stehenden Beobachtungszeit, für immer chaotisch gehalten werden. Die Wandlung eines chaotischen Attraktors zu einer nichtattraktiven chaotischen Menge wird also vielleicht gar nicht bemerkt.

Da die Überschneidung des Attraktors und der stabilen Mannigfaltigkeit mit steigendem p zunimmt und somit das "Leck" größer wird, hängt die charakteristische Lebensdauer direkt von der Differenz $p - p_c$ ab:

$$\langle \tau \rangle \approx (p - p_c)^{\gamma_R}$$

γ_R heißt kritischer Exponent der Randkrise

Der Kehrwert der charakteristischen Lebensdauer $\frac{1}{\langle \tau \rangle}$, entspricht der Anzahl der Orbitverluste in einer Zeiteinheit.

Beispiel: 2-dim. Abbildungen f mit $\det(f') < 1$

Für Abbildungen dieser Art bestehen 2 Möglichkeiten für eine Randkrise:

1. Heterokline Tangentenkrise

$$\text{Kritischer Exponent: } \gamma_{\text{Heterokl.}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\ln|\alpha_1|}{\ln|\alpha_2|} \right)$$

2. Homokline Tangentenkrise

$$\text{Kritischer Exponent: } \gamma_{\text{Homokl.}} = \frac{\ln|\beta_2|}{\ln|\beta_1 \cdot \beta_2|^2}$$

wobei $\alpha_{1,2}$ die Eigenwerte des betrachteten Orbits \mathbb{A} auf dem Attraktor sind und $\beta_{1,2}$ die Eigenwerte des instabilen Randorbits \mathbb{B} .

Beispiel: Die logistische Abbildung für den kritischen Wert $r_c = 4$:

- $r < 4$: Es existiert 1 chaotischer Attraktor im Anziehungsgebiet $[0, 1]$
Startwerte in $[0, 1]$ gehen gegen $-\infty$
Auf dem Rand des Anziehungsgebiets, bei $x = 0$, liegt ein instabiles periodisches Orbit
- $r = 4$: Anhand des Bifurkationsdiagramm sieht man, daß sich der chaotische Attraktor für $r \rightarrow 4$ innerhalb $[0, 1]$ immer weiter ausbreitet, bis er bei $r = 4$ den Rand, also das instabile Orbit der 0, berührt und dort ein "Leck" bekommt.
- $r > 4$: Der ehemalige Attraktor dehnt sich mit wachsendem r immer weiter über $[0, 1]$ hinaus aus, so daß das "Leck" in Abhängigkeit von r wächst.

Nähere Bestimmung der Lage und Größe dieses "Lecks":

Für $r < 4$ nimmt die log. Abbildung $M(x)$ ihr Maximum innerhalb des Intervalls $[0, 1]$ im Punkt $(\frac{1}{2}/1)$ an.

Für $r > 4$ existiert also ein ϵ , so daß gilt:

für $x \in [\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon]$ ist $M(x) > 1$, d.h. das Orbit geht gegen $-\infty$.

Da $M(x)$ quadratisch ist, kann ϵ in folgender von r abhängiger Form angegeben werden:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{r}}$$

4.2.2 Innere Krise

Enthält das Anziehungsgebiet neben seinem Attraktor noch ein instabiles, periodisches Orbit sowie dessen stabile und instabile Mannigfaltigkeiten, kann es durch Parameterveränderung zu einer Inneren Krise kommen.

Vor der Krise, für $p < p_c$, haben die stabile Mannigfaltigkeit und der Attraktor keine gemeinsamen Punkte, während die instabile Mannigfaltigkeit als Teil des Anziehungsgebiet irgendwann auf dem Attraktor mündet.

D.h. das instabile Orbit bildet eine Art "Umleitung" im Anziehungsgebiet:

Punkte der stabilen Mannigfaltigkeit laufen auf dieser erst zu dem periodischen Orbit, ehe sie von dort über die instabile Mannigfaltigkeit zum Attraktor gelangen.

Mit dem Parameter p verändert sich auch die Lage der stabilen Mannigfaltigkeit und des Attraktors, bis sie sich für $p = p_c$ schneiden. Dadurch wird der Attraktor abrupt vergrößert, denn Orbits des Attraktors werden, wenn sie auf dieses "Leck" treffen, erst über die stabile Mannigfaltigkeit zu dem periodischen Orbit gezogen, bevor sie über dessen instabile Mannigfaltigkeit wieder zurück auf den alten Attraktor gelangen.

Damit läßt sich das Verhalten eines Orbits auf dem Attraktor nach der Krise so beschreiben:

$$\left(\begin{array}{l} \text{bekanntes, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{wie für } p < p_c \\ \text{auf d. Attraktor} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{neues, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{auf d. Mfkeit} \\ \text{d. instab. Orbits} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{bekanntes, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{wie für } p < p_c \\ \text{auf d. Attraktor} \end{array} \right)$$

⇒ Da das instabile Orbit mitsamt seiner Mannigfaltigkeiten für alle p innerhalb des Anziehungsgebiets liegt, bleibt dem System ein Attraktor erhalten, er wird nur plötzlich vergrößert.

Soll nun auch für die Innere Krise die charakteristische Lebenszeit $\langle \tau \rangle$ eines Orbits auf dem Attraktor berechnet werden, können die gleichen Formeln wie die einer Randkrise verwendet werden. Denn für deren Herleitung spielt es keine Rolle, was mit den Orbits, nachdem es auf das "Leck" getroffen ist, passiert; also ob sie divergierten oder zu dem alten Attraktor zurückkehrten.

Auch für die Innere Krise eines Attraktors gilt daher der Zusammenhang:

$$\langle \tau \rangle \approx (p - p_c)^{\gamma_I}$$

γ_I heißt kritischer Exponent der Inneren Krise

Beispiel: Die logistische Abbildung am Ende eines period. Fensters

Die Bänderverschmelzung innerhalb eines Fensters führt zu einem chaotischen Attraktor, der aus n Teilintervallen im Bereich $[0, 1]$ besteht. Das Ende eines Periode- n -Fensters ist dadurch gekennzeichnet, daß sich diese Teilintervalle für $r = r_{FensterEnde}$ plötzlich zu einem Intervall zusammenfügen.

Der Grund ist eine Innere Krise des n -Intervalle-Attraktors:

Die Sattel-Knoten-Bifurkation bei $r_{FensterStart}$ erzeugt neben dem stabilen Periode- n Orbit auch ein instabiles Periode- n Orbit. Dieses existiert während der Perioden-Verdopplungskaskade und der anschließenden Bänderverschmelzung im

Anziehungsgebiet $[0, 1]$, ohne jedoch mit dem Attraktor zu kollidieren. Erst für $r_{FensterEnde}$ berührt jeweils eins der n Teilintervalle des Attraktors einen der n Punkte des instabilen Orbits.

Für die Orbits des Attraktors hat das zur Folge, daß sie für r gerade größer als $r_{FensterEnde}$ zwar für lange Zeit in den Teilintervallen bleiben, aber in kurzen "Ausbrüchen" auch durch die Zwischenräume laufen.

4.2.3 Mischungskrise

In diesem Fall verfügt das Dynamische System über mindestens zwei Attraktoren, deren Anziehungsgebiete durch ein Randgebiet getrennt sind, in dem (wie bei der Randkrise) ein instabiles periodisches Orbit mitsamt dessen stabiler Mannigfaltigkeit enthalten ist. Die instabile Mannigfaltigkeit dagegen liegt in allen Anziehungsgebieten der an der Mischungskrise beteiligten Attraktoren. Voraussetzung für das Zusammenfallen der Attraktoren ist Symmetrie des Systems, da diese das gleichzeitige Berühren der Attraktoren und der instabilen Mannigfaltigkeit des Randorbits gewährleistet. Die Gleichzeitigkeit ist notwendig, damit sich die Attraktoren auch wirklich vermischen, ansonsten wären es einfach zwei aufeinander folgende Randkrisen.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, ist bei einer Parameterveränderung nun folgendes zu beobachten:

Die Attraktoren nähern sich für $p \rightarrow P_c$ dem Rand mit dem instabilen Orbit, bis sie dessen stabile Mannigfaltigkeit für $p = P_c$ berühren. Dadurch entsteht also eine Verbindung zwischen den Attraktoren, denn die Orbits eines Attraktors werden, sobald sie auf dessen "Leck" treffen, wie in den obigen Krisen zu dem instabilen Orbit gezogen. Von dort folgen sie dann der instabilen Mannigfaltigkeit in das Anziehungsgebiet eines anderen Attraktors, auf dem sie bleiben, bis sie wiederum auf dessen "Leck" stoßen und dadurch auf den nächsten (bzw. den vorherigen bei 2 Attraktoren) kommen.

Für das Verhalten eines Orbits auf einem der Attraktoren gilt also:

$$\begin{pmatrix} \text{bekanntes, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{wie für } p < p_c \\ \text{auf d. Attraktor 1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{bekanntes, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{wie für } p < p_c \\ \text{auf d. Attraktor 2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{bekanntes, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{wie für } p < p_c \\ \text{auf d. Attraktor 3} \\ \text{(bzw. wieder Attraktor 1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{bekanntes, chaot.} \\ \text{Verhalten} \\ \text{wie für } p < p_c \\ \text{auf d. Attraktor 4} \\ \text{(bzw. wieder Attraktor 2)} \end{pmatrix}$$

In einer Mischungskrise bleibt dem System also eine attraktive Menge erhalten, allerdings zerfällt diese in mehrere kleinere Attraktoren bzw. entsteht durch das Verschmelzen mehrerer Attraktoren. Im letzten Fall ist es von Interesse, wie lange ein Orbit auf einem Attraktor bleibt, ehe es ihn durch das "Leck" verläßt. Für diese durchschnittliche Lebensdauer ist es wieder gleichgültig, was danach mit dem Orbit passiert, d.h. es können wieder die Zusammenhänge wie in den schon behandelten Fällen verwendet werden.

Mit der gleichen Begründung wie bei der Inneren Krise können auch in diesem Fall für die charakteristische Lebensdauer $\langle \tau \rangle$ die Formeln der Randkrise verwendet werden:

$$\langle \tau \rangle \approx (p - p_c)^{\gamma_M}$$

γ_M heißt kritischer Exponent der Mischungskrise