Zentrumsmannigfaltigkeiten

Vortrag von Eva Maria Bartram am 09. Mai 2006

Gliederung

1. Einleitung

Wir betrachten ein System $\dot{x} = f(x)$ von Differentialgleichungen, $f(0) = 0$. Eine Zentrumsmannigfaltigkeit ist eine invariante Mannigfaltigkeit tangential zum zentralen Eigenraum.

2. Zentrumsmannigfaltigkeits-Theorem für Flüsse

Sei f ein C^r-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$. Sei $A := Df(0)$. Teile das Spektrum von A in drei Teile $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$ mit

$$Re\lambda = \begin{cases} < 0 & \text{für}\lambda \in \sigma_s, \\ = 0 & \text{für}\lambda \in \sigma_c, \\ > 0 & \text{für}\lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

Sei E^s, E^c, E^u die (verallgemeinerten) Eigenräume bezüglich $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$.
Dann existieren C^r stabile und instabile invariante Mannigfaltigkeiten W^u und W^s tangential an E^u und E^s an den Ursprung
und eine C^{r-1}-Zentrumsmannigfaltigkeit W^c tangential an E^c an den Ursprung.

3. Approximationsmethode

Nehme System an als
$\dot{x} = Bx + f(x, y)$,
$\dot{y} = Cy + g(x, y)$.
Stelle Zentrumsmannigfaltigkeit dar als Graph $W^c = \{(x, y)|y = h(x))\}$ mit $h(0) = Dh(0) = 0$.
Die Projektion von $h(x)$ auf E^c ist $\dot{x} = Bx + f(x, h(x))$. Lösungen dieses Systems bieten gute Approximation des Flusses auf der Zentrumsmannigfaltigkeit.
Berechnung bzw. Approximation von $h(x)$ durch Koeffizientenvergleich in $\aleph(h(x)) = Dh(x)(Bx + f(x, h(x))) - Ch(x) - g(x, h(x)) = 0$.