

Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Blatt 9

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Selbstähnlichkeitsdimension folgender Mengen:

- a) dem Menger-Schwamm in $\mathbb{R}^3$,
- b) dem n -fachen Cantor-Staub $C \times \dots \times C \subset \mathbb{R}^n$ (n -faches Produkt der Standard-Cantormenge C),
- c) der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0, 1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0, 1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge x wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda x \in (0, 1)$ entfernt wird usw.

Aufgabe 2:

- a) Zeigen Sie: Die Hausdorff-Dimension von einer abzählbaren Menge ist 0.
- b) Konstruieren Sie eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit Box-Dimension n und Hausdorff-Dimension 0.

Aufgabe 3:

Sei h^d das d -dimensionale Hausdorff-Maß. Konstruieren Sie für jedes $d \in [0, \infty)$:

- a) eine Menge A mit $h^d(A) \in (0, \infty)$,
- b) eine Menge A mit Hausdorff-Dimension d und $h^d(A) = 0$,
- c) eine Menge A mit Hausdorff-Dimension d und $h^d(A) = \infty$.

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Es gibt Mengen, so dass die Summe der Hausdorff-Dimensionen kleiner ist als die Hausdorff-Dimension des Produkts.

Tipp: Untersuchen Sie folgende $A, B \subset [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 A &= \{0.x_1 \dots x_{n_1} 0 \dots 0 x_{n_2+1} \dots x_{n_3} 0 \dots 0 x_{n_4+1} \dots x_{n_5} \dots\} \\
 &= \{x \mid (x_{n_1+1} \dots x_{n_2}) = (0 \dots 0), (x_{n_3+1} \dots x_{n_4}) = (0 \dots 0), \dots\}, \\
 B &= \{0.0 \dots 0 x_{n_1+1} \dots x_{n_2} 0 \dots 0 x_{n_3+1} \dots x_{n_4} \dots\} \\
 &= \{x \mid (x_1 \dots x_{n_1}) = (0 \dots 0), (x_{n_2+1} \dots x_{n_3}) = (0 \dots 0), \dots\}
 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine schnell wachsende Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\dim_{\text{H}}(A) = 0, \quad \dim_{\text{H}}(B) = 0, \quad \dim_{\text{H}}(A \times B) = 1.$$

Abgabe: 23.6.2005 in der Vorlesung