Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Blatt 4

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ der Fluss des **hamiltonschen Systems**

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{grad} H(u), \quad u \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{d}{dt}(u_1, \ldots, u_{2n}) = \left(\frac{dH}{du_{n+1}}, \ldots, \frac{dH}{du_{2n}}, -\frac{dH}{du_1}, \ldots, -\frac{dH}{du_n} \right),$$

volumenerhaltend ist.

b) Zeigen Sie, dass für dieses hamiltonsche System die Funktion H (genannt **Hamilton-Funktion**) selbst invariant ist.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Für eine Hamilton-Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist jede Niveaumenge von H, die eine geschlossene Kurve ist und keine kritischen Punkte von H enthält, ein periodisches Orbit des hamiltonschen Systems

$$\frac{d}{dt}(u_1, u_2) = \left(\frac{dH}{du_2}, -\frac{dH}{du_1} \right), \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

b) Zu zeigen oder widerlegen: Wenn alle Orbits des Newton-Systems $\ddot{x} = \frac{1}{m} f(x),\ x \in \mathbb{R}^3$, den Drehimpuls $L = mx \wedge \dot{x}$ invariant lassen, dann ist f ein Zentralkraftfeld.

Aufgabe 3:
a) Sei φ ein Fluss auf einer Menge X. Zu zeigen: Orbits kreuzen sich nicht. D.h. wenn zwei Orbits $(\varphi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}},\ (\varphi_t(x_1))_{t\in\mathbb{R}}$ sich schneiden, so gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_{t_0} x_0 = x_1$.

b) Zu zeigen für einen beliebigen Fluss und eine beliebige Abbildung: Wenn u_0 periodisch mit Periode r ist, dann ist jeder Punkt im Orbit von u_0 ebenfalls periodisch mit derselben Periode r.

Aufgabe 4:
a) Zu zeigen: Ein homoklines Orbit enthält keine rekurrenten Punkte.

b) Zu zeigen oder widerlegen: Für die Lösungen der Pendelgleichung

$$\ddot{x} = -\sin x$$

auf $\{(x, v)\} : x \in S^1, v \in \mathbb{R}\}$ sind alle Punkte, die nicht auf einem der homoklinen Orbits liegen, rekurrent.

Abgabe: Montag, 9.5.2005 in der Vorlesung