Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Blatt 3

Aufgabe 1:
a) Zu zeigen: Der Spektralradius $r(A)$ einer linearen Abbildung im $\mathbb{R}^n$ erfüllt

$$r(A) = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}.$$

b) Der Spektralradius der linearen Abbildung A im $\mathbb{R}^n$ sei $\pi^2/10$. Welche Dimension haben die stabilen, instabilen und neutralen Unterräume? Was ist $\lim_{k\to\infty} A^k \cdot (1, 2, \ldots, n)$?

Aufgabe 2:
Die Standard-**Cantormenge** ist definiert als

$$C := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ erfüllt } a_n \in \{0,\ 2\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Zu zeigen:

a) C ist überabzählbar.

b) C ist homöomorph zum **Cantor-Staub** $C \times C$. (Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion zwischen ihnen mit stetiger Umkehrabbildung gibt.)

Aufgabe 3:
a) Die **Twistabbildung** auf dem Torus ist $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,\ f([(x, y)]) = [(x, y + \theta(x))]$, wobei $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\theta(0) - \theta(1) \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen: f ist volumenerhaltend.

b) Sei eine Abbildung $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definiert durch $f([(x, y)]) = [(x, y + \theta(y))]$ mit $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\theta(0) - \theta(1) \in \mathbb{Z}$. Ist die Abbildung volumenerhaltend (Beweis oder Gegenbeispiel)?

Aufgabe 4:
a) Das Vektorfeld $f(v)$ definiere auf $\mathbb{R}^2$ einen für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definierten Fluss φ, so dass $\varphi_t(v_0) = v(t)$ für die Lösung v der Gleichung $\dot{v} = f(v),\ v(0) = v_0$ gelte.

Zu zeigen: Wenn $f(x, y) = (g(y), h(x))$, wobei $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, dann ist φ_t volumenerhaltend.

b) Für welche a, b ist der durch das Vektorfeld

$$\frac{d}{dt}(x, y) = (ax + \sin(y^{21} \cos(y^{22})^2 e^{-y}), by + \cos(x^{42} \sin(x^{24}) e^{e^{-x}})$$

bestimmte Fluss volumenerhaltend?

Abgabe: Montag, 2.5.2005 in der Vorlesung