Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Lösungen zu Blatt 8

Aufgabe 1:
Sei X ein beliebiger endlicher Raum, bestehend aus N Punkten, versehen mit der Topologie, in der alle Teilmengen von X offen sind (die "feinste Topologie"; sie wird erzeugt durch die diskrete Metrik $d(x, y) = 1$ für alle $x \neq y$).

a) Geben Sie ein Beispiel einer topologisch transitiven Abbildung $f : X \to X$ an.

Lösung:
Jede Permutation, die nur aus einem Zykel besteht, hat den ganzen Raum als Orbit (und somit ein dichtes Orbit).

b) Bestimmen Sie die Zahl $T(N)$ aller topologisch transitiven Abbildungen $f : X \to X$.

Lösung:
Wenn die Permutation nur einen Zykel haben soll, gibt es für $N > 1$ genau $N - 1$ mögliche Werte unter f vom ersten Element x_1 (denn $f(x_1) = x_1$ wuerde auch ein Zykel sein). Die restlichen $n-1$ Elemente werden auch zyklisch permutiert, somit ergibt sich per Induktion

$$T(N) = (N - 1)!.$$

Für $N = 1$ stimmt die Formel auch. Für $N = 0$ (d.h. $X = \emptyset$) gilt $T(0) = 1$.

c) Gibt es eine topologisch mischende Abbildung auf X? (Beispiel oder Gegenbeweis)

Lösung:
Nein für $N > 1$, denn dann gibt es $p \in X,\ p \neq q \in X$. Es sind $U = \{x\}$ und $V = \{y\}$ offene Mengen in X. Da f eine Permutation und somit periodisch ist, gibt es beliebig große n, so dass $f^n(U) = U$, also $f^n(U) \cap V = \emptyset$.

Für $N = 1$ (und $N = 0$) sind natürlich alle Abbildungen $f : X \to X$ topologisch mischend.

Aufgabe 2:
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B_k := \{\omega \in \Omega = \Omega_2 | \, \forall m, n \in \mathbb{N} : |\sum_{i=n}^{m} (-1)^{\omega_i}| \leq k\}$ die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die gilt, dass für jeden endlichen Block von Ziffern von ω, egal wie lang, sich die Zahl der 0-en von der Zahl der 1-en höchstens um k unterscheidet.

a) Zeigen Sie: B_k ist eine Shift-invariante und abgeschlossene Teilmenge von Ω.

Lösung:
Sei $\omega \in B_k$. Für jeden Block $((\sigma(\omega))_n, \ldots, (\sigma(\omega))_m)$ ist die Zahl der Nullen minus der Zahl der Einsen gleich der des Blocks Für jeden Block $(\omega_{n-1}, \ldots, \omega_{m-1})$, also $\leq k$. Somit ist B_k Shift-invariant.

Wenn nun

$$\lim_{i \to \infty} \omega^i = \omega$$

für eine Folge $(\omega^i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt, dann gibt es $l = l(i) \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{i \to \infty} l(i) = \infty$ und

$$\omega^i_k = \omega_k$$

für alle $|k| < l(i)$.

Somit ist

$$\sum_{i=n}^{m} (-1)^{\omega_i} = \sum_{i=n}^{m} (-1)^{\omega_i^j} \leq k$$

für alle j mit $l(j) > \max(|n|, |m|)$.

b) Ist $\sigma : B_k \to B_k$ ist topologisch transitiv? (Beweis oder Widerlegung)

Lösung:
Ja. Beweis (analog Beweis für Shift auf Ω, etwas modifiziert): Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Abzählung aller endlicher Blöcke von 0en und 1en, die die Bedingung von B_k erfüllen, d.h.

$$a_n := \sum_{i \text{ indiziere } A_n} (-1)^{\omega_i}$$

erfülle $|a_n| \leq k$ für alle n. Setze

$$A'_n := \text{ die } a_n\text{-fache Wiederholung der Ziffer } \begin{cases} 1 & \text{für } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{für } a_n < 0 \end{cases}.$$

Dann liegt die einseitige Folge

$$\omega = (A_1 A'_1 A_2 A'_2 \ldots)$$

in B_k, denn dies gilt für alle A_n und somit auch für die A'_n. ω hat ein dichtes Orbit, denn jedes A_n kommt unter σ irgendwann am Ursprung vorbei, also liegt in jedem Zylinder ein Element des Orbits.

c) Zeigen Sie: $\sigma : B_k \to B_k$ ist nicht topologisch mischend.

Lösung:
Sei U die Zylinder-Umgebung, die durch Festlegen der Werte an den Stellen $0, 1, \dots, k-1$ auf 0 definiert ist. Sei V die Zylinder-Umgebung, die durch Festlegen der Werte an den Stellen $m, m+1, \dots, m+k-1$ auf 0 definiert ist.

Annahme: $U \cap f^n(V)$ sei nichtleer, enthalte also ein $\omega \in B_k$. Dann muss erstens $n = m$ sein. Zweitens müssen in den Stellen $0, 1, \dots, k-1$ und $m, \dots, m+k-1$ nur 0en stehen. Folglich stehen in den Stellen $k, k+1, \dots, m-1$ genau k mehr 1en als 0en. Denn wenn's mehr wären, läge dieser Block nicht in B_k, und wenn's weniger wären, enthielte der Block von 0 bis $m+k-1$ zuviele 0en.

Einen solchen Block gibt es nur, wenn m und k beide gerade oder beide ungerade sind. Durch Wählen von $m = k+1$ haben wir also ein Gegenbeispiel konstruiert.

Aufgabe 3:
Sei A eine 2×2-Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

a) Zeigen Sie: Für $|\det(A)| = 1$ ist die Abbildung $L_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\left[\binom{x}{y}\right] \mapsto \left[A \cdot \binom{x}{y}\right]$ ein Diffeormorphismus auf dem 2-Torus.

Lösung:
A ist ganzzahlig, deswegen wird das Einheitsgitter in sich abgebildet. Ist $|\det(A)| = 1$, ist die inverse Matrix auch ganzzahlig und bildet das Einheitsgitter auch in sich selbst ab. Damit lassen sich durch Interpolation alle Punkte des $\mathbb{R}^2$, somit des Torus, bijektiv auf sich abbilden.

Lineare Abbildungen (wie A und A^{-1}) sind natürlich glatt, also ist die Abbildung L_A ein Diffeomorphismus.

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $L_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ hat für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich viele periodische Punkte der Periode n genau dann, wenn A keine Eigenwerte λ mit $|\lambda| = 1$ hat.

Lösung:
Gibt es so einen Eigenwert, hat die Matrix einen zugehörigen Eigenvektor (wie man mittels Jordan-Normalform sieht). Alle Punkte der Eigenrichtung sind fest oder periodisch, und das sind überabzählbar viele.

Gibt es keinen solchen Eigenwert, dann ist A hyperbolisch, und nur rationale Punkte mit Nenner $(||A||_\infty)^n$ kommen in Frage. Das sind endlich viele.

Aufgabe 4:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, L_A die **arnoldsche Katzenabbildung**,

$$G_q := \left\{ \left[\begin{pmatrix} a/q \\ b/q \end{pmatrix} \right] \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

das $q \times q$-Gitter auf dem 2-Torus ($q \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

a) Es gibt kein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so dass $L_A^n =$id.

Lösung:
A hat einen Eigenwert λ mit $|\lambda| \neq 1$ (damit gilt das sogar für beide Eigenwerte). Somit gilt für einen Eigenvektor v, dass $||A^n v|| = |\lambda|^n ||v|| \neq ||v||$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n = n(q)$, so dass $(L_A|_{G_q})^n =$id.

Lösung:
G_q ist eine endliche Menge, somit jede Abbildung $G_q \to G_q$ präperiodisch. $L_A|_{G_q}$ ist invertierbar, also periodisch.

c) Finden Sie eine obere Schranke für $n(100)$.

Lösung:
$n(100) \leq 10000!$ (Zahl der Permutationen von G_{100}).

Bemerkung: Die wirkliche Periode ist überraschend klein, in der Größenordnung von q.