Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1:
a) Das zugehörige Vektorfeld

$$f(u) = \frac{d}{dt}(u_1, \ldots, u_{2n}) = \left(\frac{\partial H}{\partial u_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial u_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial u_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial u_n} \right)$$

hat Divergenz

$$\mathrm{div} f = \frac{\partial^2 H}{\partial u_{n+1} du_1} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial u_{2n} du_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 du_{n+1}} - \cdots - -\frac{\partial^2 H}{\partial u_n du_{2n}} = 0.$$

b) Zu zeigen ist, dass $H(\varphi_t(u)) = H(u)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, wobei φ der Hamilton-Fluss ist. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(u) &= \frac{\partial H}{\partial u_1}\dot{u}_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial u_{2n}}\dot{u}_{2n} \\ &= \frac{\partial H}{\partial u_1}\frac{\partial H}{\partial u_{n+1}} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial u_n}\frac{\partial H}{\partial u_{2n}} - \frac{\partial H}{\partial u_{n+1}}\frac{\partial H}{\partial u_1} - \cdots - \frac{\partial H}{\partial u_{2n}}\frac{\partial H}{\partial u_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
a) $M_c := f^{-1}(c)$ ist nach Voraussetzungen eine geschlossene Kurve. Zunächst ist das Vektorfeld $f(u) = \dot{u}$ tangential an die Kurve, denn $f(u)$ ist nach Konstruktion sekrecht zum Gradient von H und dieser senkrecht zu den Niveaulinien. Somit bleibt jedes Orbit, das auf M_c beginnt, auch auf M_c. Nach Voraussetzung enthält M_c keine kritischen Punkte, also ist

$$0 < \min_{u \in M_c} ||f(u)|| =: K.$$

Wegen der Annahmen an H ist diese Kurve stetig differenzierbar, hat also endliche Länge L. Somit muss das Orbit spätestens nach Zeit L/K wieder auf sich selbst treffen. Somit ist es periodisch (Siehe auch Aufgabe 3).

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, dass

$$0 = \dot{L} = -m\ddot{x} \wedge x,$$

genau dann, wenn für alle x gilt, dass $f(x)$ parallel zu x ist, somit f ein Zentralkraftfeld.

Aufgabe 3:
a) Wenn die Orbits $(\varphi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}, (\varphi_t(x_1))_{t\in\mathbb{R}}$ sich schneiden, so gibt es $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_{t_0}(x_0) = \varphi_{t_1}(x_1))$. Wegen der Flusseigenschaften gilt dann $\varphi_{t_0-t_1}(x_0) = x_1$.

b) Wenn

$$\varphi_r(u_0) = u_0$$

ist, gilt wegen der Flusseigenschaften für jeden Punkt $u_t = \varphi_t(u_0)$ im Orbit von u_0, dass

$$\varphi_r(u_t) = \varphi_{r+t}(u_0) = \varphi_t\varphi_r(u_0) = \varphi_t u_0 = u_t.$$

Aufgabe 4:

a) Da das homokline Orbit gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert, gilt für jedes x_0 auf diesem Orbit, dass für alle n bzw. t, die außerhalb eines endlichen Intervalls liegen, $f^n(x_0)$ bzw. $\varphi_t(x_0)$ in einer ε-Umgebung von x^* liegen. Für $\varepsilon < d(x_0, x^*)/2$ kommt das Orbit also nicht mehr in eine ε-Umgebung von x_0 zurück.

b) Alle Orbits außer den homoklinen sind periodisch und somit alle Punkte darauf rekurrent.