Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 1:
a) Die Matrix hat Eigenwerte $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Davon ist einer vom Betrag > 1, also der zugehörige Eigenraum expandierend und somit der Fixpunkt $x = 0$ von f weder Poisson- noch asymptotisch stabil.

b) Die Eigenwerte sind $-1 \pm i/2$, somit beide Realteile negativ und damit der Fixpunkt attraktiv, somit asymptotisch und Poisson stabil.

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $||f^n(x)||_2 = ||x||_2$. Also ist der Fixpunkt Poisson-, aber nicht asymptotisch stabil.

Aufgabe 2:
a) Die Eigenwerte erfüllen

$$|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|,$$

also ist der Fixpunkt $x = 0$ ein hyperbolischer Sattel. Die Eigenrichtung $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} (-1-\sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = (1-\sqrt{5})/2$ kontrahiert, alle anderen Punkte nähern sich asymptotisch der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} (-1+\sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Die Eigenwerte sind $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ mit Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} (1\pm\sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte erfüllen $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, also ist der Fixpunkt $x = 0$ ein hyperbolischer Sattel.

Aufgabe 3:
a) Beide Eigenvektoren haben positiven Realteil, also ist $x = 0$ ein abstoßender Knoten. Insbesondere hat das Verhalten der Orbits für dieses System nichts mit dem des Systems in Aufgabe 2a zu tun.

b) Beide Eigenvektoren haben positiven Realteil, also ist $x = 0$ wieder ein abstoßender Knoten. Und wieder ist Verhalten der linearen

Differentialgleichung ganz anders als das Verhalten des linearen Systems (Aufgabe 2b) mit derselben Matrix.

Aufgabe 4:
a) Die Fixpunkte sind 0 und $x^* := 1 - 1/k$, was für $k \in (1, 4]$ ein von 0 verschiedener Fixpunkt in [0,1] ist.

Es gilt $f'(x) = k(1-2x)$, also $f'(x^*) = 2-k$. Somit ist x^* für $1 < k < 3$ ein attraktiver Fixpunkt (und auch für $k \leq 1$, denn das wurde ja schon auf Übungsblatt 1 gezeigt), für $3 < k \leq 4$ ein abstoßender Fixpunkt.

Für $k = 3$ gilt $f'(x^*) = -1$, so dass nicht offensichtlich ist, ob x_0 anziehend oder abstoßend ist. Generell gilt aber: Ist

$$f(x^* + h) = x^* - h + ah^2 + o(h^2),$$

dann ergibt Einsetzen, dass

$$f^2(x^* + h) = x^* + h - 2ah^2 + o(h^2).$$

Also gilt für $g = f^2$, dass $g(x) < x$ für $x \in (x^*, x^* + \varepsilon)$ und $g(x) < x$ für $x \in (x^* - \varepsilon, x^*)$ und somit ist für g (also auch für f) der Punkt x^* von rechts (aber nicht von links) anziehend und nach links (aber nicht nach rechts) abstoßend. Insgesamt ist x^* für $k = 3$ also weder anziehend noch abstoßend.

b) Für $k \leq 2$ ist $x_0 \leq 1/2$, das Maximum von f liegt bei $x = 1/2$, $f(x) > x$ auf $(0, x^*)$, und es ist f monoton steigend auf $(0, x^*)$. Somit konvergiert jedes Orbit mit Startwert in $(0, x^*)$ mononton gegen x^*.

Ebenso konvergiert jedes Orbit mit Startwert in $(x^*, 1/2)$ gegen x^*, da f hier ebenfalls monoton steigend ist und $f(x) < x$ auf diesem Intervall.

Für $x \in (x^*, 1)$ ist $f(x) \in (0, x^*)$, somit gilt ab da das obige Argument wieder.

Die Punkte $x = 0, x = 1$ konvergieren offensichtlich gegen $x = 0$.