Normal hyperbolische relative Fixmengen

Mara Sommerfeld

13. Juli 2012

Der folgende Text basiert auf Teilen des Buches *Dynamics and Symmetry* von Mike Field, vor allem auf dem Anfang des 8. Kapitels.

Sofern nicht explizit anders definiert, sei G im Folgenden eine kompakte Lie-Gruppe und M sei eine glatte G-Mannigfaltigkeit. $\mathrm{Diff}_G(M)$ bezeichne die Menge der G-äquivarianten Diffeomorphismen auf M. Wir nehmen jeweils ohne Einschränkung an, dass die Wirkung orthogonal ist. Andernfalls erhält man eine orthogonale Wirkung, indem man die Riemannsche Metrik über die Gruppenwirkung mittelt.

Angenommen $x \in M$ sei ein Fixpunkt von f. Aus der G-Äquivarianz von f folgt, dass der ganze Orbit Gx aus Fixpunkten besteht. Sofern der G-Orbit eine positive Dimension hat, können diese Fixpunkte nicht hyperbolisch sein. Im Allgemeinen kann man daher nicht davon ausgehen, dass die Fixpunkte unter leichten Störungen von f erhalten bleiben. (Dabei versehen wir $\mathrm{Diff}_G(M)$ mit der C^∞-Topologie oder der Whitney-C^∞-Topologie, siehe Field, *Dynamics and Symmetry*.) Es gibt aber einen Hyperbolizitätsbegriff für f-invariante Mengen, der unten eingeführt wird: *normale Hyperbolizität*. Aus der Theorie von normal hyperbolischen invarianten Mengen folgt für einen normal hyperbolischen f-invarianten G-Orbit, dass für jedes $\tilde{f} \in \mathrm{Diff}_G(M)$ in einer Umgebung von f ein (ebenfalls normal hyperbolischer) $\tilde{f}$-invarianter G-Orbit in der Nähe von α existiert. Es ist daher sinnvoller auch f-invariante G-Orbits statt nur Orbits von Fixpunkten zu betrachten. Zudem kann man erwarten, dass die Zustände x und gx mit $g \in G$ in den meisten Anwendungen sehr ähnliche Eigenschaften haben. In diesem Sinn kann man auch Zustände als "Fixpunkte" von f auffassen, die in einem f-invarianten G-Orbit liegen. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1. Eine *relative Fixmenge* für $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$ ist ein f-invarianter G-Orbit $\alpha = Gx$, $x \in M$.

Die folgende Definition von normaler Hyperbolizität entspricht der Eigenschaft "immediately absolutely 1-hyperbolisch" aus *Invariant Manifolds* von M. W. Hirsch, C. C. Pugh und M. Shub:

Definition 2. M sei eine glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus und $P \subset M$ eine f-invariante kompakte glatte Untermannigfaltigkeit von M. Dann ist P *normal hyperbolisch* für f, falls es eine $\mathrm{d}f$-invariante Zerlegung des Vektorbündels $T_P M := TM|_P$ in stetige Untervektorbündel $T_P M = TP \oplus \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$ und eine Riemannsche Metrik mit induzierter Norm $||\cdot||$

gibt, so dass

$$\sup_{x\in P} ||\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^s_x}|| < \inf_{x\in P} m(\mathrm{d}f|_{T_xP}), \tag{1}$$

$$\sup_{x\in P} ||\mathrm{d}f|_{T_xP}|| < \inf_{x\in P} m(\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u_x}), \tag{2}$$

wobei $m(A) = \inf_{||X||=1} ||AX||$ $(= ||A^{-1}||^{-1}$, falls A invertierbar ist).

Für normal hyperbolische invariante Mengen gelten ähnliche Aussagen, wie für hyperbolische Fixpunkte: Es gibt eine stabile und eine instabile Mannigfaltigkeit, die tangential an $TP \oplus \mathbb{E}^s$ bzw. $TP \oplus \mathbb{E}^s$ liegen, und f ist lokal topologisch konjugiert zu $\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s}$. Wie oben beschrieben, bleibt die Dynamik stabil unter kleinen Störungen von f in einer Umgebung einer normal hyperbolischen Menge erhalten. Im Fall eines normal hyperbolischen G-Orbits (also einer relativen Fixmenge) sind die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit G-invariant und die Konjugation zwischen f und $\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s}$ ist ein G-äquivarianter Homöomorphismus. Genauere Aussagen findet man in Hirsch, Pugh, Shub, *Invariant Manifolds*, (4.1) bzw. Field, *Dynamics and Symmetry*, Theorem 8.2.1 für den Fall einer normal hyperbolischen relativen Fixmenge.

Die Zerlegung $T_PM = TP \oplus \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$ ist eindeutig und hängt nicht von der Wahl einer Riemannschen Metrik ab, so dass die Abschätzungen (1) und (2) erfüllt sind (Hirsch, Pugh, Shub, *Invariant Manifolds*, (1.2)). Daraus folgt für den Fall, dass P eine G-invariante Untermannigfaltigkeit einer G-Mannigfaltigkeit M ist und $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$ gilt, dass $\mathbb{E}^u$ und $\mathbb{E}^s$ G-invariant sind: Für $g \in G$ sei $||\cdot||_g := ||\mathrm{d}g\cdot||$. $g : M \to M$ bezeichne die Abbildung $m \mapsto gm$. Dann ist

$$\begin{aligned}
||\mathrm{d}f(x)|_{\mathbb{E}^s_x}||_g &= \sup_{v\in\mathbb{E}^s_x,\ ||v||_g=1} ||\mathrm{d}f(x)v||_g = \sup_{v\in\mathbb{E}^s_x,\ ||\mathrm{d}gv||=1} ||\mathrm{d}g\mathrm{d}f(x)v|| \\
&= \sup_{v\in\mathbb{E}^s_x,\ ||\mathrm{d}gv||=1} ||\mathrm{d}f(gx)\mathrm{d}gv|| = ||\mathrm{d}f(gx)|_{\mathrm{d}g\mathbb{E}^s_x}||.
\end{aligned}$$

Analoge Gleichungen gelten für $m(\mathrm{d}f|_{T_xP})$, $||\mathrm{d}f|_{T_xP}||$ und $m(\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u_x})$. Falls die Abschätzungen (1) und (2) für $\mathbb{E}^u$, $\mathbb{E}^s$ und $||\cdot||$ erfüllt sind, gelten sie also entsprechend für $\mathrm{d}g\mathbb{E}^u$ $\mathrm{d}g\mathbb{E}^s$ und $||\cdot||_g$. Aus der Eindeutigkeit ergibt sich $\mathrm{d}g\mathbb{E}^u = \mathbb{E}^u$ und $\mathrm{d}g\mathbb{E}^s = \mathbb{E}^s$.

Daraus ergibt sich wiederum, dass die Metrik G-invariant gewählt werden kann:

Sei $||\cdot||$ die Norm einer Riemannschen Metrik, so dass (1) und (2) erfüllt sind. Es sei $||\cdot||_G := \int_G ||g\cdot||\mathrm{d}\mu(g)$, wobei μ das Haarmaß auf G bezeichne. Dann ist für $x \in P$

$$\begin{aligned}
&||\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^s_x}||_G \\
&= \sup\{||\mathrm{d}f(x)v||_G | v \in \mathbb{E}^s_x, ||v||_G = 1\} \\
&= \sup\left\{\int_G ||g\mathrm{d}f(x)v||\mathrm{d}\mu(g) \middle| v \in \mathbb{E}^s_x, \int_G ||gv||\mathrm{d}\mu(g) = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\int_G ||\mathrm{d}f(gx)gv||\mathrm{d}\mu(g) \middle| v \in \mathbb{E}^s_x, \int_G ||gv||\mathrm{d}\mu(g) = 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sup_{g\in G} ||\mathrm{d}f(gx)|_{\mathrm{d}g\mathbb{E}^s_x}|| \int_G ||gv||\mathrm{d}\mu(g) \middle| v \in \mathbb{E}^s_x, \int_G ||gv||\mathrm{d}\mu(g) = 1\right\} \\
&= \sup_{g\in G} ||\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^s_{gx}}||.
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man $||\mathrm{d}f|_{T_xP}||_G \leq \sup_{g\in G}||\mathrm{d}f|_{T_{gx}P}||$,

$$m_G(\mathrm{d}f|_{T_xP}) := ||\mathrm{d}f|_{T_xP}^{-1}||^{-1} \geq \inf_{g\in G} m(\mathrm{d}f|_{T_xP}),$$

und $m_G(\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u_x}) \geq \inf_{g\in G} m(\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u_{gx}})$. Also erfüllt auch die über G gemittelte Norm $||\cdot||_G$ die Abschätzungen (1) und (2).

Das Ziel ist im Folgenden, die normale Hyperbolizität einer relativen Fixmenge mit einer ähnlich einfachen Spektralbedingung wie für Fixpunkte zu charakterisieren. Dazu wird der nächste Satz benötigt, nach dem die normale Hyperbolizität einer relativen Fixmenge äquivalent durch scheinbar schärfere Bedingungen beschrieben wird:

Satz 3. *Sei α eine relative Fixmenge für $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$. α ist genau dann normal hyperbolisch für f, wenn es eine G-invariante Riemannsche Metrik mit Norm $||\cdot||$ und eine glatte orthogonale Zerlegung $T_\alpha M = T\alpha \oplus \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ in $\mathrm{d}f$- und G-invariante glatte Untervektorbündel gibt, so dass $f|_\alpha$ eine Isometrie ist und*

$$\sup_{x\in\alpha}||\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^s_x}|| <1, \tag{3}$$

$$\inf_{x\in\alpha} m(\mathrm{d}f|_{\mathbb{E}^u_x}) >1. \tag{4}$$

Beweis. Sei α normal hyperbolisch für f. Da G transitiv auf α operiert, folgt die Glattheit der Zerlegung aus der G-Invarianz von $\mathbb{E}^u$ und $\mathbb{E}^s$. Für eine Riemannsche Metrik, die (1) und (2) erfüllt, definieren wir eine neue Riemannsche Metrik auf $T_\alpha M$, die auf $T\alpha$, $\mathbb{E}^u$ und $\mathbb{E}^s$ jeweils mit der gegebenen Metrik übereinstimmt, so dass $T\alpha$, $\mathbb{E}^u$ und $\mathbb{E}^s$ paarweise orthogonal sind. Da die Zerlegung glatt ist, ist auch die so definierte Metrik glatt. Dann gelten weiterhin (1) und (2).

Wir betrachten nun die Einschränkung $f|_\alpha$. Es sei $x \in \alpha$, $H := G_x$ und $N(H) := \{n \in G | nH = HN\}$ der Normalisator von H. Für $g \in G$ ist $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. Da $f(x)$ die gleiche Isotropiegruppe wie x hat, gibt es also ein $n \in N(H)$, so dass $f(x) = nx$. Dann folgt $f(gx) = gnx$. $N(H)$ operiert auf $\alpha = Gx$ durch

$$n'(gx) := gn'^{-1}x$$

für $n' \in N(H)$ und $g \in G$. (Das ist wohldefiniert, da für $h \in H$ gilt: $n'(ghx) = ghn^{-1}x = gn'^{-1}h'x$ für ein $h' \in H$, also $n'(ghx) = gn'^{-1}x = n'(gx)$.) Da diese Wirkung mit der G-Wirkung kommutiert, erhält man eine $G \times N(H)$-Wirkung, so dass f der Multiplikation mit $(1, n^{-1})$ entspricht.

Wenn $A \subset N(H)$ eine abelsche Untergruppe ist, die n enthält, ist f ein $G \times A$-äquivarianter Diffeomorphismus. Wie in der Rechnung oben erhält man daher, dass $\sup_{g\in G}||\mathrm{d}f|_{T_{gx}\alpha}||$ in der über $G \times A$ gemittelten Metrik auf α nicht größer als in der ursprünglichen Metrik auf α ist. Ebenso ist $\inf_{g\in G} m(\mathrm{d}f|_{T_{gx}\alpha})$ nicht kleiner. Da $f|_\alpha$ der Multiplikation mit $(1, n^{-1})$ entspricht, ist $f|_\alpha$ in der über $G \times A$ gemittelten Metrik auf α eine Isometrie. Ersetzt man in der zuvor konstruierten Metrik auf $T_\alpha M$, für die $T\alpha$, $\mathbb{E}^u$ und $\mathbb{E}^s$ paarweise orthogonal sind, die $T\alpha$-Komponente durch die über $G \times A$ gemittelte Metrik, so erhält man also eine Metrik auf $T_\alpha M$ mit den geforderten Eigenschaften außer der G-Invarianz. Diese lässt sich mit Kartenumgebungen und einer Teilung der Eins auf M fortsetzten. Mitteln über G liefert die gewünschte Metrik. □

Definition 4. Sei $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$ und $\alpha = Gx$, für ein $x \in M$, eine relative Fixmenge. Dann gibt es ein $n \in G$, so dass $nf(x) = x$. Das *reduzierte Spektrum von f entlang α* ist die Menge

$$\mathrm{spec}(f, \alpha) := \{|\lambda| | \lambda \in \sigma(\mathrm{d}(nf)(x))\} ,$$

wobei σ das Spektrum bezeichnet und Vielfachheiten berücksichtigt werden: Die Vielfachheit von $r \in \mathrm{spec}(f, \alpha)$ ist die Summe der Vielfachheiten aller $\lambda \in \sigma(\mathrm{d}(nf)(x))$ mit $|\lambda| = r$.

Bemerkung 5. Wie im Beweis von Satz 3 folgt aus $G_x = G_{f(x)}$ und $G_{nf(x)} = nG_{f(x)}n^{-1}$, dass n im Normalisator $N(H)$ von $H := G_x$ enthalten ist.

Zunächst ist die Wohldefiniertheit von $\mathrm{spec}(f, \alpha)$ zu zeigen. Wir beginnen mit dem Fall $M = \alpha$:

Lemma 6. *Falls $M = \alpha$ eine relative Fixmenge von $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$ ist, gilt unabhängig von der Wahl von $x \in \alpha$ und $n \in N(H)$ mit $nf(x) = x$, dass* $\mathrm{spec}(f, \alpha) = 1$. 1 *hat also die Vielfachheit* $\dim(\alpha)$ *in* $\mathrm{spec}(f, \alpha)$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3 gezeigt, gibt es ein G-invariante Metrik, so dass f eine Isometrie ist. Unabhängig von der Wahl von n ist dann auch nf eine Isometrie, also hat $\mathrm{d}(nf)(x)$ nur Eigenwerte vom Betrag 1. □

Bemerkung 7. Daraus folgt sofort, dass 1 in $\mathrm{spec}(f, \alpha)$ immer mindestens die Vielfachheit $\dim(\alpha)$ hat, da die Einschränkung $\mathrm{d}(nf)(x)|_{T\alpha}$ nur Eigenwerte vom Betrag 1 hat.

Zum Beweis der Wohldefiniertheit von $\mathrm{spec}(f, \alpha)$ im allgemeinen Fall, wird ein entsprechender Begriff für G-Vektorbündel über ${}^{G}\!/_{H}$ eingeführt:

Definition 8. Ein *G-Vektorbündel* ist ein glattes Vektorbündel $p : E \to M$, so dass E und M G-Mannigfaltigkeiten sind, p G-äquivariant ist und für alle $g \in G$ die Multiplikation $g : E_x \to E_{gx}$ linear ist, wobei $E_x := p^{-1}(x)$.

Eine *G-Vektorbündelabbildung* zwischen G-Vektorbündeln $p : E \to M$ und $p' : E' \to M'$ ist eine G-äquivariante Vektorbündelabbildung $A : E \to E'$, das heißt, es gibt eine G-äquivariante Abbildung $a : M \to M'$, so dass $p' \circ A = a \circ p$ und jede Einschränkung $A : E_x \to E'_{a(x)}$ ist linear. *A hebt a hoch.*

Beispiel 9.

1. Falls M eine G-Mannigfaltigkeit ist, ist $\pi : TM \to M$ ein G-Vektorbündel. Die Multiplikation mit $g \in G$ auf TM entspricht dabei der Ableitung dg der Multiplikation $g : M \to M$ mit g auf M. $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$ induziert die G-Bündelabbildung $\mathrm{d}f : TM \to TM$.

2. Wenn $\alpha \subset M$ eine relative Fixmenge von $f \in \mathrm{Diff}_G(M)$ ist, so ist $T_\alpha M := TM|_\alpha$ ein G-Vektorbündel und die Einschränkung von f auf $T_\alpha M$ eine G-Vektorbündelabbildung.

Wendet man den folgenden Satz die G-Vektorbündelabbildung $\mathrm{d}f : T_\alpha M \to T_\alpha M$ an, so erhält man die Wohldefiniertheit von $\mathrm{spec}(f, \alpha)$. Dazu verwendet man die Isomorphie $\alpha \cong {}^{G}\!/_{H}$, wobei $H = G_x$ für ein $x \in \alpha$.

Satz 10. *$H \subset G$ sei eine abgeschlossene Untergruppe und $p : E \to {}^{G}\!/_{H}$ ein G-Vektorbündel. $A : E \to E$ sei eine G-Vektorbündelabbildung, die $a \in \mathrm{Diff}_G(M)$ hochhebt. Für $x \in \alpha$ und $n \in G$ mit $na(x) = x$ sei*

$$|\sigma(nA(x))| = \{|\lambda||\lambda \in \sigma(nA(x))\}$$

(mit Vielfachheiten gezählt). Dann hängt $|\sigma(nA(x))|$ nicht von der Wahl von n und x mit $na(x) = x$ ab.

Wenn die Unabhängigkeit von n gezeigt ist, ist die Unabhängigkeit von x klar: Für $y = gx$ ist $gng^{-1}a(y) = y$ und $gng^{-1}A(y) = gnA(x)g^{-1}$ ist konjugiert zu $nA(x)$. Die Unabhängigkeit von g zeigen wir auf zwei verschiedene Weisen, wobei die erste Variante näher an dem (minimal fehlerhaften) Beweis aus *Dynamics and Symmetry* von Field ist als die zweite.

Für beide Varianten benötigt man den folgenden Zusammenhang zwischen dem Normalisator $N(H) = \{n \in G|nH = Hn\}$ und dem Zentralisator $C(H) := \{c \in G|ch = hc \;\forall h \in H\}$ einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset G$, dabei schreiben wir jeweils K_0 für die Zusammenhangskomponente von 1 in einer Lie-Gruppe K:

Satz 11. *Für eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ gilt*

$$N(H)_0 = H_0 C(H)_0.$$

Beweis. Siehe Field, *Dynamics and Symmetry*, Corallary 3.10.1. □

1.Variante:

Lemma 12. *V sei eine G-Darstellung. Für $A \in \mathrm{End}_G(V)$ gelte $A(Gx) = Gx$ für alle $x \in V$. Dann gilt für alle $B \in \mathrm{End}_G(V)$, dass $|\sigma(AB)| = |\sigma(B)|$.*

Beweis. (Skizze) Es sei $V = \bigoplus_i V_i^{p_i}$ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten, so dass V_i und V_j für $i \neq j$ nicht isomorph sind. Dann bilden A und B jeweils $V_i^{p_i}$ in sich selbst ab. Daher reicht es, für jedes i die Einschränkungen von A und B auf $V_i^{p_i}$ zu betrachten. Abhängig davon, ob V_i absolut irreduzibel, von komplexem Typ oder von reellem Typ ist, gilt ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren $\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{R}^{p_i}$, $\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{C}^{p_i}$ oder $\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{H}^{p_i}$ (Field, *Dynamics and Symmetry*, Proposition 2.7.3). Da das Spektrum durch das Minimalpolynom bestimmt wird, wird eine G-äquivariante Abbildung unter dem Isomorphismus auf einen Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{p_i}$, $\mathbb{C}^{p_i} \cong \mathbb{R}^{2p_i}$ bzw. $\mathbb{H}^{p_i} \cong \mathbb{R}^{4p_i}$ mit dem gleichen Spektrum abgebildet.

Für A folgt aus $A(Gx) = Gx$ sogar, dass A jede irreduzible Komponente in sich selbst abbildet. Somit wird A unter dem Isomorphismus auf eine Diagonalmatrix mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{H}$ abgebildet, unabhängig von der Wahl der Basis auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{H}^n$. Also ist A von der Form $z\mathbb{1}$ mit $z \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$ bzw. $z \in \mathbb{H}^n$. Da $A(Gx) = Gx$ außerdem impliziert, dass A orthogonal ist, sind damit die Fälle gezeigt, dass V_i absolut irreduzibel oder von komplexem Typ ist. Falls V_i von quaternionischem Typ ist, verwenden wir die Jordan-Normalform für Endomorphismen von $\mathbb{H}$-Vektorräumen (N.A. Wiegmann, *Some theorems on matrices with real quaternion elements*, Canad. J. Math., 7 (1955), S. 191–201). Wir wählen eine $\mathbb{H}$-Vektorraumbasis von $\mathbb{H}^{p_i}$, so dass B in Jordan-Normalform ist. (Diese kann sogar so gewählt werden, dass die Diagonaleinträge komplex sind, uns reicht aber schon eine obere Dreiecksform für B.) Dann entsprechen die Eigenwerte von B den Eigenwerten der Diagonaleinträge $h_1, \dots, h_{p_i}$ von B, die als Endomorphismen von $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ aufgefasst werden. Die Eigenwerte von AB entsprechen den Eigenwerten von $zh_1, \dots zh_{p_i}$. Da die Betragsfunktion $|\cdot|$ auf $\mathbb{H}$ multiplikativ ist, also $|ab| = |a||b|$ für $a, b \in \mathbb{H}$, sind die Beträge der Eigenwerte eines Elements h von $\mathbb{H}$, das als $\mathbb{R}$-linearer Endomorphismus $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ aufgefasst wird, alle gleich $|h|$. Da $|z| = 1$, sind also jeweils die Beträge der Eigenwerte von h_i und zh_i identisch. □

Korollar 13. *K sei eine abelsche kompakte Liegruppe und V eine K-Darstellung. Dann gilt für alle $k \in K$ und $A \in \operatorname{End}_K(V)$, dass $|\sigma(kA)| = |\sigma(a)|$.*

Beweis. Da K abelsch ist, ist die Multiplikation mit $k \in K$ K-äquivariant, außerdem gilt offensichtlich $k(Kx) = Kx$ für alle $x \in V$. Aus Lemma 12 folgt $|\sigma(kA)| = |\sigma(a)|$ für alle $A \in \operatorname{End}_K(V)$. □

Beweis von Satz 10. Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von $|\sigma(nA(x))|$ von der Wahl von $n \in G$ mit $na(x) = x$. Ohne Einschränkung sei $x = H \in {}^{G}/_{H}$. Dann muss $n \in N(H)$ gelten. Wir nehmen zunächst an, dass $N(H)$ zusammenhängend ist. Aus Satz 11 folgt dann $N(H) = HC(H) = C(H)H$. Daher ist $n = ch$ mit $c \in C(H)$ und $h \in H$, es gilt also

$$ca(x) = ca(hx) = cha(x) = x.$$

Wir zeigen, dass $|\sigma(n'A(x))| = |\sigma(cA(x))|$ für alle n' mit $n'a(x) = x$: ca und cA sind G-äquivariant. Sei $K \subset G$ eine abelsche Untergruppe, die $n'c^{-1}$ enthält. Dann sind ca und cA insbesondere K-äquivariant. Da E_x eine K-Darstellung ist, folgt $|\sigma(n'A(x))| = |\sigma(cA(x))|$ aus Lemma 13.

Falls $N(H)$ nicht zusammenhängend ist, gibt es $m \geq 1$ mit $a^m(x) \in N(H)_0 x$. Falls $na(x) = x = n'a(x)$ ist, gilt $n^m a(x) = x = n'^m a(x)$. Wie im Fall, dass $N(H)$ zusammenhängend ist, zeigt man $|\sigma(n'^m A^m(x))| = |\sigma(n^m A^m(x))|$. Da $n^m A^m(x) = (nA(x))^m$ bzw. $n'^m A^m(x) = (n'A(x))^m$ ist, folgt $|\sigma(n'A(x))| = |\sigma(nA(x))|$. □

2.Variante:

Beweis von Satz 10. Wie in der 1. Variante, reicht es, den Fall, dass $N(H)$ zusammenhängend ist, zu betrachten und $|\sigma(n'A(x))| = |\sigma(cA(x))|$ für alle n' mit $n'a(x)$ zu zeigen, wobei $c \in C(H)$ und $ca(x) = x$. Es sei $n = h'c$. Dann ist

$$h'x = h'c(x) = n'(x) = x,$$

also $h' \in H$. Da $h' : E_x \to E_x$ mit $cA(x)$ kommutiert, haben beide linearen Abbildungen eine gemeinsame Basis von verallgemeinerten Eigenvektoren. Bezüglich eines H-invarianten Skalarprodukts auf E_x ist h' eine orthogonale Abbildung und hat daher nur Eigenwerte vom Betrag 1. Da die Eigenwerte von $nA(x) = h'c'A(x)$ Produkten von Eigenwerten von $c'A(x)$ und h' entsprechen, folgt $|\sigma(n'A(x))| = |\sigma(cA(x))|$. □

Wir haben nun die Wohldefiniertheit von $\operatorname{spec}(f, \alpha)$ gezeigt. Nun können wir anhand von $\operatorname{spec}(f, \alpha)$ entscheiden, ob α normal hyperbolisch für f ist:

Satz 14. *Sei α eine relative Fixmenge von $f \in \operatorname{Diff}_G(M)$.*

1. *Die Vielfachheit von* 1 *in* $\operatorname{spec}(f, \alpha)$ *ist mindestens* $\dim \alpha$.

2. 1 *hat genau dann die Vielfachheit* $\dim \alpha$, *wenn* α *normal hyperbolisch für* f *ist.*

Beweis. 1 wurde bereits im Bemerkung 7 gezeigt.

2 „$\Leftarrow$": Sei α normal hyperbolisch für f. Da $\mathbb{E}^s$ und $\mathbb{E}^u$ $\mathrm{d}f$- und G-invariant sind, sind $\mathbb{E}^s_x$ und $\mathbb{E}^u_x$ invariante Unterräume von $\mathrm{d}(nf)(x)$. $||\cdot||$ sei die Norm zu einer Riemannschen Metrik wie in Satz 3. Dann gilt

$$||\mathrm{d}(nf)(x)|_{\mathbb{E}^s_x}|| = ||\mathrm{d}n(f(x))|_{\mathbb{E}^s_x} \circ \mathrm{d}f(x)|_{\mathbb{E}^s_x}|| = ||\mathrm{d}f(x)|_{\mathbb{E}^s_x}|| < 1.$$

Also hat $\mathrm{d}(nf)(x)$ in $\mathbb{E}^s_x$ nur Eigenwerte vom Betrag < 1. Ebenso folgt, dass $\mathrm{d}(nf)(x)$ in $\mathbb{E}^u_x$ nur Eigenwerte vom Betrag > 1 hat. Also ist die Vielfachheit von 1 in $\operatorname{spec}(f, \alpha)$ nicht größer als $\dim \alpha$.

2 „$\Rightarrow$": Wir definieren eine Metrik wie in Satz 3 auf ähnliche Weise wie im Beweis von Satz 3: Wir wählen ein Skalarprodukt auf T_xM, so dass $T_x|_\alpha$, $\mathbb{E}^s_x$ und $\mathbb{E}^u_x$ paarweise orthogonal sind und für die induzierte Norm $||\cdot||$ gilt, dass $||\mathrm{d}(nf)(x)|_{es_x}|| < 1$ und $m(\mathrm{d}(nf)(x)|_{\mathbb{E}^u_x}) > 1$. Durch Mitteln über $H := G_x$ wird das Skalarprodukt H-invariant und kann anschließend G-invariant auf zu einer Metrik $T_\alpha M$ fortgesetzt werden. Mittelt man die Einschränkung dieser Metrik auf $T\alpha$ über die $G \times N(H)$-Wirkung, so erhält man eine Metrik auf $T_\alpha M$ mit den in Satz 3 beschriebenen Eigenschaften. Durch Fortsetzen auf TM und Mitteln über die G-Wirkung erhält man eine Metrik auf M, die die Bedingungen erfüllt. $\square$