Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2017/2018

30. November 2017

Graphen

Graphen gehören zu den wichtigsten mathematischen Strukturen für die Informatik. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Grundbegriffe der Graphentheorie diskutiert.

Grundlegende Definitionen

Definition 5.1

Ein ungerichteter Graph G ist ein Paar (V, E), wobei V eine beliebige Menge ist und E eine Menge von zweielementigen Teilmengen von V.
Die Elemente von V heißen *Ecken* oder *Knoten* (im Englischen *vertices*, Singular *vertex*) von G, die Elemente von E *Kanten* (im Englischen *edges*).
Ist ein Graph G gegeben, so schreiben wir $V(G)$ für die Menge der Ecken von G und $E(G)$ für die Menge der Kanten.

In der Mathematik werden auch unendliche Graphen betrachtet, aber für die aktuelle Vorlesung vereinbaren wir, dass alle Graphen endlich sind, also nur endlich viele Ecken haben.
Anstelle von "ungerichteter Graph" sagen wir meistens einfach nur "Graph".

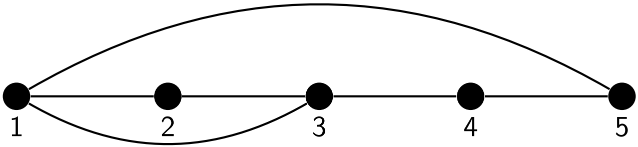
Graphen lassen sich veranschaulichen, in dem man für jede Ecke einen Punkt zeichnet und zwei Punkte genau dann durch eine Linie verbindet, wenn die beiden entsprechende Ecken eine Kante bilden.

Beispiel 5.2

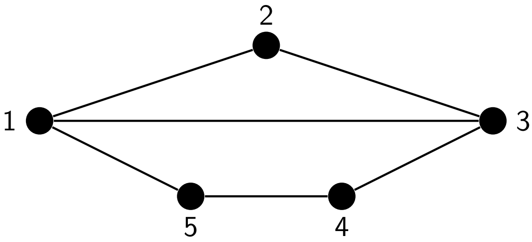
Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

Diesen Graphen veranschaulichen wir durch folgendes Bild:



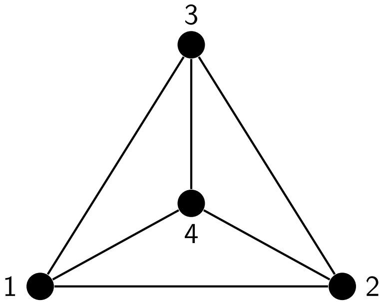
Diese Darstellung ist nicht eindeutig. Man kann G auch wie folgt darstellen:



Beispiel 5.3

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

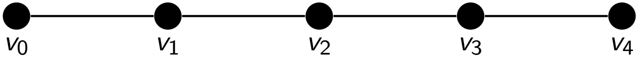


Dieser Graph hat die Eigenschaft, dass je zwei verschiedene Ecken eine Kante bilden. So einen Graphen nennt man *vollständig*.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen vollständigen Graphen mit der Eckenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dieser Graph wird mit K_n bezeichnet. Der oben abgebildete Graph ist also K_4.

Beispiel 5.4

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_0, \ldots, v_4\}$, wobei die v_i paarweise verschieden sind, und sei
$E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$.

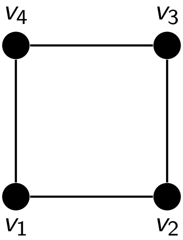


Dann nennt man G einen *Weg der Länge* 4.

Allgemein nennt man für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen mit einer Eckenmenge von $n+1$ verschiedenen Knoten $v_0, \ldots, v_n$, dessen Kanten genau die Mengen $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i < n$, sind, einen *Weg der Länge* n.

Beispiel 5.5

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, wobei die v_i paarweise verschieden sind, und sei $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}$.



Dann nennt man G einen Kreis der Länge 4.

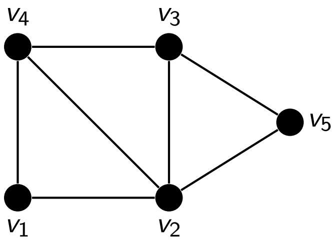
Allgemein nennt man für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ einen Graphen mit einer Eckenmenge von n verschiedenen Knoten $v_1, \ldots, v_n$, dessen Kanten genau die Mengen $\{v_i, v_{i+1}\}$, $1 \leq i < n$, und $\{v_n, v_1\}$ sind, einen *Kreis* der Länge n.

Definition 5.6

Sei seien G und G' Graphen. G' heißt *Teilgraph* von G, falls $V(G') \subseteq V(G)$ und $E(G') \subseteq E(G)$ gelten. Ist G' ein Teilgraph von G, so schreiben wir $G' \subseteq G$.

Beispiel 5.7

Sei G der folgende Graph:

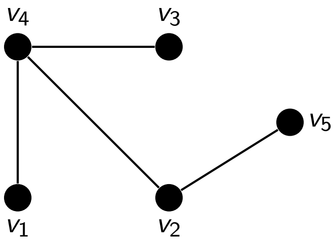


Definition 5.6

Sei seien G und G' Graphen. G' heißt *Teilgraph* von G, falls $V(G') \subseteq V(G)$ und $E(G') \subseteq E(G)$ gelten. Ist G' ein Teilgraph von G, so schreiben wir $G' \subseteq G$.

Beispiel 5.7

Ein Teilgraph von G:

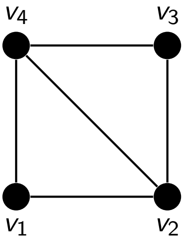


Definition 5.6

Sei seien G und G' Graphen. G' heißt *Teilgraph* von G, falls $V(G') \subseteq V(G)$ und $E(G') \subseteq E(G)$ gelten. Ist G' ein Teilgraph von G, so schreiben wir $G' \subseteq G$.

Beispiel 5.7

Noch ein Teilgraph von G:

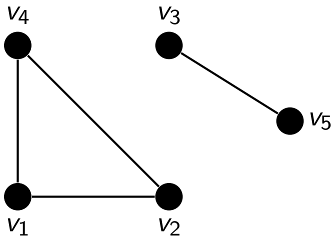


Definition 5.8

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn für je zwei verschiedene Knoten $v, w \in V(G)$ ein Weg in G existiert, der v und w verbindet.
Ein Weg, der v und w verbindet, ist dabei ein Teilgraph W von G, der ein Weg mit den Endknoten v und w ist.

Beispiel 5.9

Der folgende Teilgraph H von G ist nicht zusammenhängend:



Definition 5.10

Ein Teilgraph G' eines Graphen G heißt *Zusammenhangskomponente* von G, falls G' selbst zusammenhängend ist und es keinen zusammenhängenden Teilgraphen F von G gibt, so dass $G' \subseteq F$ und $G' \neq F$ gilt.

Beispiel 5.11

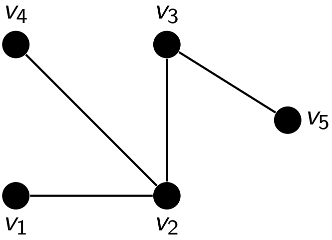
Der Graph H aus Beispiel 5.9 hat zwei Zusammenhangskomponenten, eine mit der Eckenmenge $\{v_3, v_5\}$ und eine mit der Eckenmenge $\{v_1, v_2, v_4\}$.

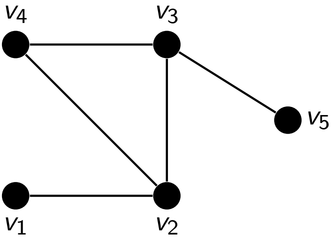
Definition 5.12

Ein Graph G ist ein *Baum*, wenn G zusammenhängend ist und keine Kreise enthält, also keine Teilgraphen hat, die Kreise sind.

Beispiel 5.13

Der linke Graph ist ein Baum, der rechte nicht:

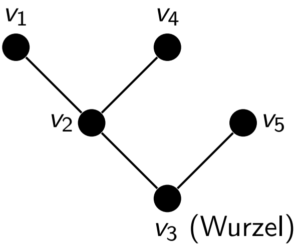




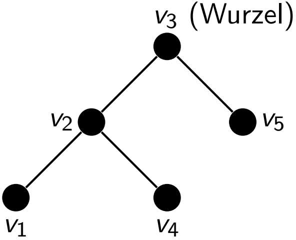
In der Informatik betrachtet man oft Bäume mit einer *Wurzel*, d.h., man legt fest, dass ein bestimmter Knoten des Baumes die Wurzel ist.

Beispiel 5.14

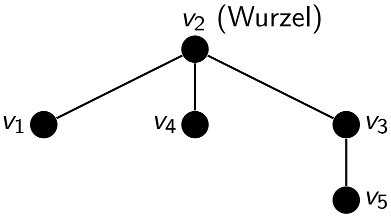
Wir legen den Knoten v_3 als Wurzel des Baumes aus Beispiel 5.13 fest. Eine naheliegende Darstellung dieses Graphen ist dann die folgende:



Allerdings ist es in der Informatik relativ üblich, dass Bäume von oben nach unten wachsen. Das führt zum Beispiel zu der folgenden Darstellung:



Wählen wir v_2 als Wurzel, so ist zum Beispiel die folgende Darstellung naheliegend:



Definition 5.15

Sei G ein Graph und $v \in V(G)$.
Der *Grad* der Ecke v ist die Anzahl der Kanten, an denen v beteiligt ist.
Den Grad von v bezeichnen wir mit $d(v)$.

Satz 5.17

Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, wobei die Ecken v_i paarweise verschieden sind. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Korollar 5.18

In einem Graphen ist die Zahl der Knoten von ungeradem Grad immer gerade.

Definition 5.19

Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten vom Grad 1. Dann heißt v ein *Endknoten* von G.

Lemma 5.20

Ist B ein Baum mit mindestens zwei Knoten, so hat B auch mindestens zwei Endknoten.

Satz 5.21

Sei B ein Baum mit n Knoten. Dann hat B genau $n - 1$ Kanten.

Definition 5.22

Zwei Graphen G und H heißen *isomorph*, falls es eine Bijektion $f : V(G) \to V(H)$ gibt, so dass für alle $x, y \in V(G)$ mit $x \neq y$ gilt:

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(H)$$

Solch eine Bijektion f heißt *Isomorphismus* zwischen G und H.

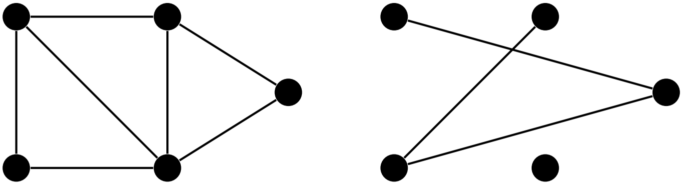
Zum Beispiel sind je zwei vollständige Graphen mit der gleichen Eckenzahl isomorph.
Ebenso sind je zwei Wege der gleichen Länge isomorph.
Auch je zwei Kreise der gleichen Länge sind isomorph.

Definition 5.23

Für einen Graphen G definiert man den *Komplementgraphen* (oder einfach das *Komplement*) von G als den Graphen mit derselben Eckenmenge, dessen Kanten genau die zweielementigen Teilmengen von $V(G)$ sind, die nicht Kanten von G sind.

Beispiel 5.24

Hier ein Beispiel für einen Graphen und sein Komplement:



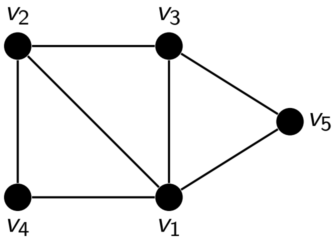
Sind zwei Graphen isomorph, so sind es auch ihre Komplemente.

Definition 5.25

Sei G ein Graph mit n Ecken und sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ die Menge der Ecken von G, so dass $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$ gilt.
Dann heißt $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ die *Gradfolge* von G.
Bei manchen Autoren wird die Gradfolge auch in aufsteigender Reihenfolge angegeben.

Beispiel 5.26

Der folgende Graph hat die Gradfolge $(4, 3, 3, 2, 2)$. Die Knoten sind so bezeichnet, dass $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_5)$ gilt.



Bemerkung 5.27

Wenn zwei Graphen G und H isomorph sind, so haben sie dieselbe Gradfolge.
Die Umkehrung gilt nicht unbedingt.
Die folgenden zwei Graphen haben beide die Gradfolge $(2, 2, 2, 1, 1)$, sind aber nicht isomorph.