Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2017/18

26. Oktober 2017

Definition 1.20

Für eine natürliche Zahl n versteht man unter einer *n-stelligen Verknüpfung* oder einer *n-stelligen Operation* auf einer Menge M eine Abbildung $f : M^n \to M$.

Der wichtigste Spezialfall ist der einer *binären* Verknüpfung $f : M^2 \to M$. Beispiele binärer Verknüpfungen sind die Addition

$$+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; (m, n) \mapsto m + n$$

und die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; (m, n) \mapsto m \cdot n.$$

Boolesche Algebra

Definition 1.21

Gegeben sei eine Menge B, die mindestens die zwei verschiedenen Elemente 1 und 0 enthält, zusammen mit der einstelligen Verknüpfung $\neg : B \to B$ und den zwei zweistelligen Verknüpfungen $\sqcap, \sqcup : B^2 \to B$.
$(B, \sqcap, \sqcup, \neg, 0, 1)$ heißt eine *Boolesche Algebra*, wenn für alle $a, b, c \in B$ die folgenden Gleichungen gelten:

(A1) Assoziativgesetze:

- $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

(A2) Kommutativgesetze:

- $a \sqcap b = b \sqcap a$
- $a \sqcup b = b \sqcup a$

(A3) Distributivgesetze:

- $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$
- $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

(A4) Beschränkheit:

- $a \sqcap 1 = a$
- $a \sqcup 0 = a$

(A5) Komplementierung:

- $a \sqcap \neg a = 0$
- $a \sqcup \neg a = 1$

Die Aussagen (A1)–(A5) sind die *Axiome* für Boolesche Algebren.

Beispiel 1.22

1. Die *Schaltalgebra* ist die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte mit den Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.
2. Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ mit den Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ und Komplementbildung sowie den Konstanten $1 := M$ und $0 := \emptyset$ eine Boolesche Algebra, die *Potenzmengenalgebra* von M.

Satz 1.23

Für alle $a \in B$ gilt $a \sqcap a = a$ und $a \sqcup a = a$.

Satz 1.24 (Dualitätsprinzip für Boolesche Algebren)

Jede Aussage, die eine Folgerung aus den Axiomen (A1)–(A5) ist, geht in eine gültige Aussage über, wenn man in ihr überall die Zeichen $\sqcap$ und $\sqcup$ sowie die Zeichen 0 und 1 vertauscht.

Satz 1.25

Für alle $a \in B$ gilt $a \sqcap 0 = 0$ und $a \sqcup 1 = 1$.

Satz 1.26 (De Morgansche Regeln)

Für alle $a, b \in B$ gilt $\neg(a \sqcap b) = \neg a \sqcup \neg b$ und $\neg(a \sqcup b) = \neg a \sqcap \neg b$.

Das Summenzeichen

Die *reellen Zahlen* sind die bekannten Zahlen auf der Zahlengerade wie -1, 0, 2.5, $-\frac{10}{7}$, e und π, für die die üblichen Rechenregeln gelten.

Definition 1.27

Für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sei

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Dabei heißt i der *Laufindex*, 1 ist die *untere Summationsgrenze* und n die *obere Summationsgrenze*.

Der Laufindex muss nicht mit i bezeichnet werden und die untere Summationsgrenze muss nicht 1 sein. So ist zum Beispiel

$$\sum_{j=0}^{4} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31.$$

Summen mit wechselnden Vorzeichen, wie zum Beispiel $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ kann man bequem mit Hilfe von Potenzen von -1 schreiben.

$$\sum_{i=1}^{4} (-1)^i a_i = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$

$$\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} a_i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

Falls $a_1 = \cdots = a_n = a$ gilt, so ist $\sum_{i=1}^n a_i = na$.
Das bekannte Distributivgesetz lautet $a(b + c) = ab + ac$. Das Gesetz gilt auch für mehr als zwei Summanden.
Für alle reellen Zahlen $a, b_1, \ldots, b_n$ ist

$$a \sum_{i=1}^{n} b_i = a(b_1 + \cdots + b_n) = ab_1 + \cdots + ab_n = \sum_{i=1}^{n} ab_i.$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes können wir Ausdrücke wie $(a + b)(c + d)$ ausmultiplizieren und erhalten

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Allgemein gilt

$$(a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n) \\ = a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_m b_1 + \cdots + a_m b_n.$$

Mit dem Summenzeichen geschrieben erhalten wir

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

Da wir nach dem Kommutativgesetz für die Addition die Summanden vertauschen können ohne den Wert der Summe zu ändern, ist

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j.$$

Auf der Änderung der Summationsreihenfolge beruht auch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Oft kann man dieselben Summen unterschiedlich aufschreiben. So ist zum Beispiel

$$\sum_{i=0}^{3} a_{2i+1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \sum_{i=1}^{4} a_{2i-1}.$$

Bemerkung 1.28

Analog zum Summenzeichen kann man auch das Produktzeichen definieren. Sind $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, so setzt man

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n.$$

Elementare Zahlentheorie

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ gelten die bekannten Rechengesetze:

1. Assoziativgesetze:
    - $a + (b + c) = (a + b) + c$
    - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. Kommutativgesetze:
    - $a + b = b + a$
    - $a \cdot b = b \cdot a$
3. Distributivgesetz:
    - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation:
    - $a \cdot 1 = a$

Prinzip der vollständigen Induktion. Sei $A(n)$ eine Aussageform. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} A(n)$ genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. *Induktionsanfang*: $A(1)$ ist wahr.
2. *Induktionsschritt*: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Kompakt geschrieben gilt also für jede Aussageform $A(n)$:

$$(A(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}(A(n) \Rightarrow A(n+1))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} A(n)$$

Satz 2.1

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. Sei $A(n)$ die Aussageform $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang. A(1) ist wahr.
A(1) ist nämlich die Aussage $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.
Es gilt $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
Wir können also annehmen, dass $A(n)$ wahr ist. Das ist die *Induktionsannahme*.
Nun zeigen wir $A(n+1)$ unter dieser Annahme. $A(n+1)$ ist die Aussage

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},$$

also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1).$$

Nach der Induktionsannahme ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Mit dieser Information erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Das zeigt $A(n+1)$.
Damit haben wir den Induktionsanfang und den Induktionsschritt bewiesen. Es folgt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Für ganze Zahlen a und b schreiben wir $a|b$, falls a ein Teiler von b ist.

Satz 2.2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar.

Beweis. Sei $A(n)$ die Aussageform “3 teilt $n^3 - n$”. Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang. A(1) ist wahr.
A(1) nämlich die Aussage $3|1^3 - 1$, also $3|0$. Diese Aussage ist wahr.

Induktionsschritt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
Sei also $n \in \mathbb{N}$. Wieder nehmen wir an, dass $A(n)$ wahr ist, und zeigen $A(n+1)$. Die Induktionsannahme ist also $3|n^3 - n$.
$A(n+1)$ ist die Aussage $3|(n+1)^3 - (n+1)$.
Wir vereinfachen:

$$\begin{aligned}&(n+1)^3 - (n+1)\\ &\qquad = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $n^3 + 3n^2 + 2n$ durch 3 teilbar ist, und dürfen benutzen, dass $n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.
Es gilt

$$n^3 + 3n^2 + 2n = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n.$$

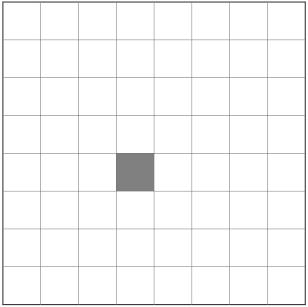
Der erste Summand der rechten Seite dieser Gleichung, $n^3 - n$, ist nach Induktionsannahme durch 3 teilbar.
Der Rest, $3n^2 + 3n$, ist offenbar auch durch 3 teilbar. Das zeigt $3|(n+1)^3 - (n+1)$ und damit $A(n+1)$.
Damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ bewiesen. Zusammen mit dem Induktionsanfang folgt $3|n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Problem 2.3

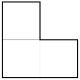
Ein quadratischer Hof mit der Seitenlänge 2^n soll mit L-förmigen Fliesen gefliest werden. Dabei soll ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 in der Mitte des Hofes frei bleiben, weil da eine Statue aufgestellt werden soll. Die Fliesen haben die Form von drei aneinander gesetzten Quadraten mit Seitenänge eins.

Ist es möglich, den Hof bis auf das Quadrat in der Mitte vollständig mit den Fliesen zu überdecken, ohne dass die Fliesen sich überlappen und ohne Fliesen zu zerschneiden?

Im Folgenden betrachten wir nur Quadrate, deren Seitenlängen ganzzahlig sind. Auch stellen wir uns immer vor, dass die Quadrate in der Ebene liegen, wobei die Koordinaten der Ecken der Quadrate alle ganzzahlig sind.

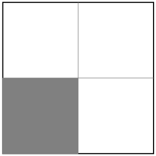


Hof

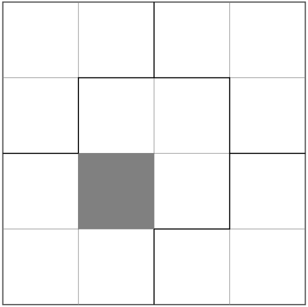


Fliese

Wir betrachten zunächst die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ und sehen, dass wir den Hof wie gewünscht fliesen können. Schon der Fall $n = 1$ genügt für den Induktionsanfang.



$n = 1$



$n = 2$

Eine naheliegende Induktionsannahme ist die Aussageform $A(n)$:

"Jeder quadratische Hof mit der Kantenlänge 2^n kann bis auf ein fehlendes Quadrat der Kantenlänge 1 in der Mitte vollständig mit L-förmigen Fliesen gefliest werden."

Es stellt sich heraus, dass wir Schwierigkeiten haben, die gewünschte Induktion mit dieser Induktionsannahme durchzuführen.

$B(n)$ sei die Aussageform "Jeder quadratische Hof mit der Kantenlänge 2^n kann bis auf ein beliebig vorgegebenes fehlendes Quadrat der Kantenlänge 1 vollständig mit L-förmigen Fliesen gefliest werden".

Wir zeigen, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Der **Induktionsanfang** ist einfach: $B(1)$ gilt, da von einem Quadrat der Kantenlänge 2 nach Entfernen eines Quadrates der Kantenlänge 1 eine L-förmige Fliese übrig bleibt.

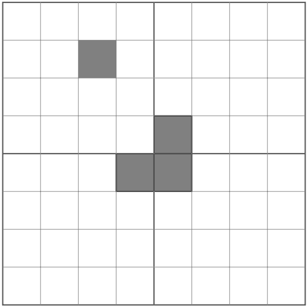
Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $B(n) \Rightarrow B(n+1)$ gilt.
Sei also $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $B(n)$ gilt. Sei nun ein Quadrat mit Kantenlänge 2^{n+1} vorgegeben, in dem ein Quadrat der Kantenlänge 1 markiert ist, welches beim Überdecken ausgelassen werden soll.

Wir zerlegen dieses Quadrat in vier Quadrate der Kantenlänge 2^n.

Das markierte Quadrat der Kantenlänge 1 liegt in einem dieser vier Quadrate.

Nun legen wir eine der L-förmigen Fliesen so in die Mitte des Quadrats mit Kantenlänge 2^{n+1}, dass die drei Quadrate der Fliese alle in je einem der vier Quadrate der Kantenlänge 2^n zum liegen kommen, wobei dasjenige der vier Quadrate, das das markierte Quadrat enthält, nicht getroffen wird.

Zerlegung des Quadrats der Kantenlänge 2^{n+1} und Lage der ersten Fliese:



Nun genügt es, jedes der vier Quadrate mit Kantenlänge 2^n mit L-förmigen Fliesen zu überdecken, wobei jeweils ein Quadrat der Kantenlänge 1 ausgelassen werden muss.

Das ist aber nach der Induktionsannahme $B(n)$ möglich.

Das zeigt die Implikation $B(n) \Rightarrow B(n+1)$.

Also gilt $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das löst das Problem. $\square$

Verfahren zum Fliesen des Hofes:

- Wenn der Hof die Kantenlänge 2 hat, so bleibt neben dem markierten Quadrat genau Platz für eine L-förmige Fliese.
- Wenn der Hof für ein $n > 1$ die Kantenlänge 2^n hat, so unterteile den Hof in vier Quadrate der Kantenlänge 2^{n-1} und lege eine Fliese so in die Mitte des Hofes, dass sie genau die drei Quadrate der Kantenlänge 2^{n-1} trifft, die nicht das markierte Quadrat enthalten.
- Führe den Algorithmus für die vier Quadrate der Kantenlänge 2^{n-1} durch, wobei das ursprünglich markierte Quadrat und die drei Quadrate, die von der ersten Fliese überdeckt werden, markiert werden.

Vollständige Induktion mit beliebigem Startwert. Es sei n_0 eine ganze Zahl und $A(n)$ eine Aussageform.

Dann gilt $A(n)$ genau dann für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$, wenn $A(n_0)$ wahr ist und die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Satz 2.4

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt $2n + 1 < 2^n$.

Satz 2.5 (Geometrische Summenformel)

Sei q eine reelle Zahl $\neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Vollständige Induktion mit mehreren Vorgängern. Wieder sei $A(n)$ eine Aussageform. Dann gilt $A(n)$ genau dann für alle natürlichen Zahlen n, wenn $A(1)$ wahr ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Implikation gilt: $A(1) \wedge \cdots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Bei dieser Variante ist die Induktionsannahme die Annahme, dass $A(1), \ldots, A(n)$ wahr sind.

Eng mit der vollständigen Induktion verwandt sind *rekursive Definitionen*.

Beispiel 2.6

Wir definieren einen Folge natürlicher Zahlen a_n wie folgt:

1. $a_1 = 1$
2. $a_{n+1} = 2a_n + 1$

Definition 2.7 (Fibonacci-Zahlen)

Es sei $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Für alle $n \geq 1$ sei $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$.

Satz 2.8

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$