Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2017/2018

1. Februar 2018

Vektorrechnung und Matrizenringe

Erinnerung: Für einen Körper K und $n \in \mathbb{N}$ ist K^n die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus K.

Wir definieren eine Addition auf K^n.

Definition 8.1

Wir nennen die Elemente von K^n *Vektoren*.
Die Summe zweier Vektoren $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ definieren wir komponentenweise.
Es sei

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Außerdem definieren wir die Multiplikation von Vektoren mit Elementen des Körpers K.
Sei $\alpha \in K$ und $v = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$. Dann sei

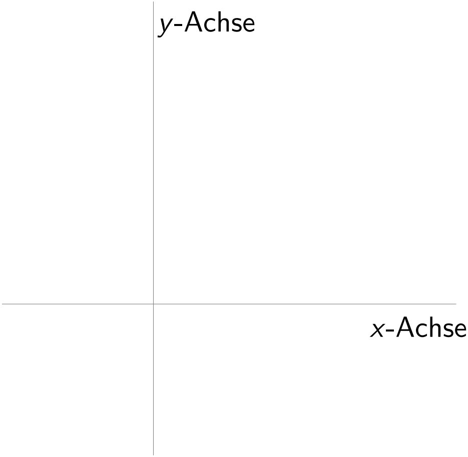
$$\alpha v := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

In diesem Zusammenhang nennt man α einen *Skalar* mit dem der Vektor v skaliert wird.

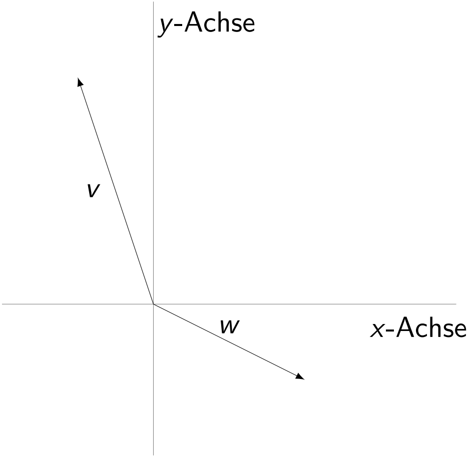
Beispiel 8.2

Wir stellen uns Vektoren in $\mathbb{R}^2$ als Punkte in der Anschauungsebene oder als Pfeile vom Nullpunkt zu einem Punkt in der Ebene vor.
Die Summe von Vektoren lässt sich dann geometrisch als Aneinanderreihung von Pfeilen interpretieren.
Entsprechendes gilt in $\mathbb{R}^3$ oder ganz allgemein in $\mathbb{R}^n$, wobei unsere Anschauung im Falle $n > 3$ natürlich sehr herausgefordert wird.

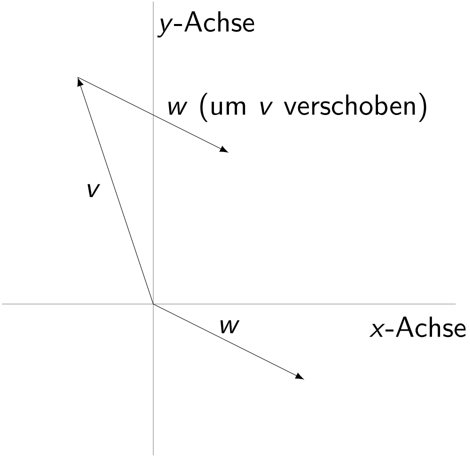
Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$.



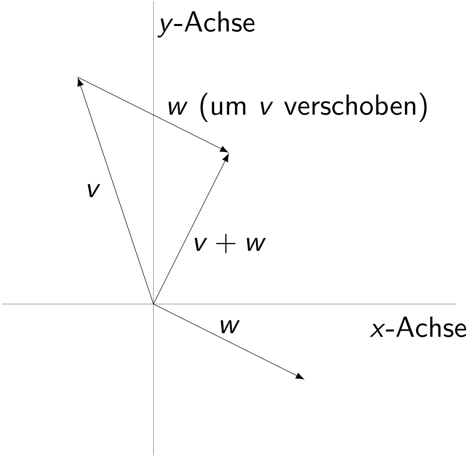
Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$.



Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$.



Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$.



Sei $\alpha = 2.5$ und $v := (-1, 3)$.
Dann ist $\alpha v = (-2.5, 7.5)$.
Die Multiplikation mit dem Skalar α entspricht einer Streckung um den Faktor α.

Satz 8.3

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) $(K^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
Das neutrale Element der Addition ist der Vektor $(0, \ldots, 0)$, den wir den Nullpunkt *nennen.*

b) Für alle $v, w \in K^n$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $(\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v)$
4. $1v = v$.

Eine Struktur der Form K^n mit der Operation $+$ und der Multiplikation mit Skalaren ist ein *Vektorraum*.
Wir werden Vektorräume im zweiten Teil der Vorlesung studieren.

Beispiel 8.4

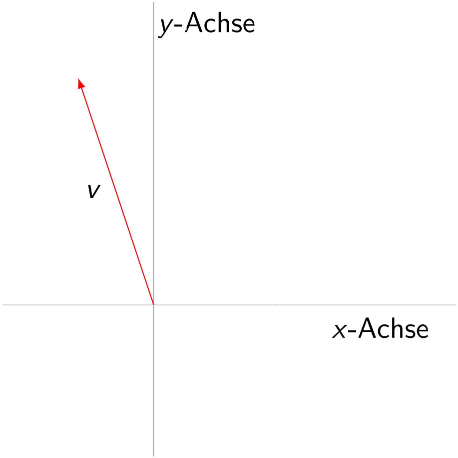
Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^2$ und $v = (-1, 3)$.
Sei
$$U = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist U eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$.

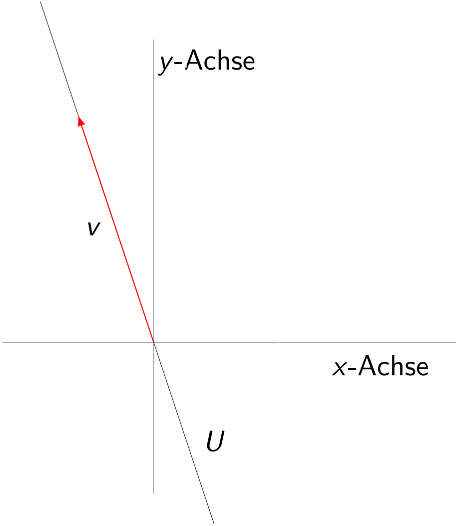
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt nämlich nach Satz **??**
$\alpha v - \beta v = (\alpha + (-\beta))v \in U$.
Nach unserem Kriterium für Untergruppen folgt nun, dass U tatsächlich eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$ ist.

Die Menge U der skalaren Vielfachen von v ist einfach die Gerade durch den 0-Punkt, die den Vektor v enthält.
Die Nebenklassen von U in $\mathbb{R}^2$ sind die Geraden in $\mathbb{R}^2$, die zu der Geraden U parallel sind.

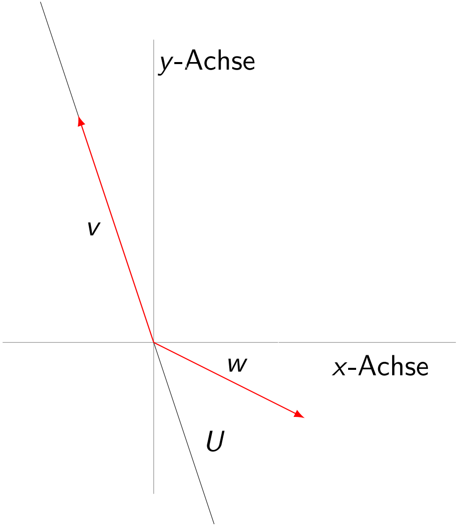
Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$ und $U := \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$.



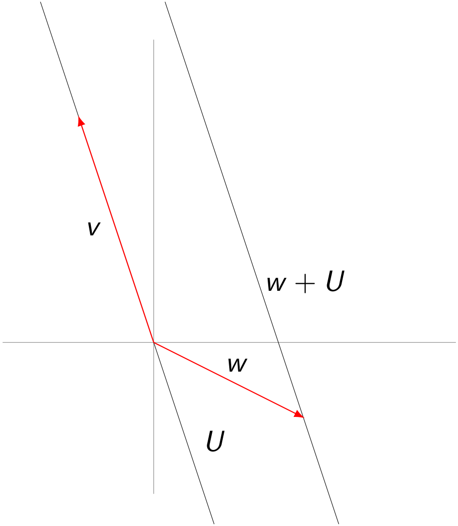
Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$ und $U := \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$.



Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$ und $U := \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$.



Sei $v := (-1, 3)$ und $w := (2, -1)$ und $U := \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$.



Wir definieren noch eine weitere Operation zwischen Vektoren in K^n.

Definition 8.5

Seien $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$.
Dann ist das (*Standard-*) *Skalarprodukt* von $v = (a_1, \ldots, a_n)$ und $w = (b_1, \ldots, b_n)$ das Körperelement

$$\langle v, w \rangle := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Die Bezeichnungen "Skalarprodukt" und "Multiplikation mit einem Skalar" geben leicht Anlass zur Verwirrung.
Es handelt sich um die Standardbezeichnungen und man muss aufpassen, dass man sich immer genau klarmacht, worum es geht.

Beispiel 8.6

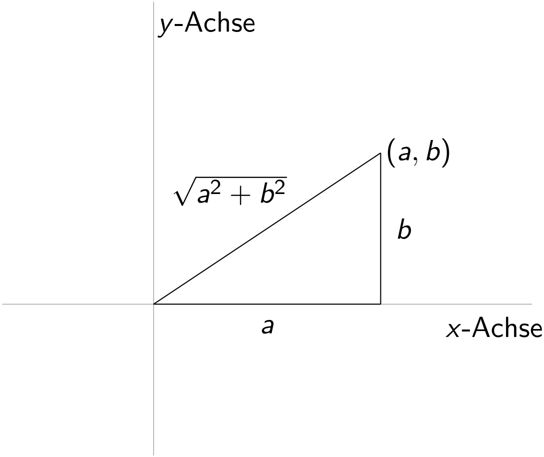
Wir rechnen wieder über dem Körper $\mathbb{R}$.
Sei $v = (1, 2, 3)$ und $w = (-1, 2, 1)$.
Dann gilt

$$\langle v, w \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 + 4 + 3 = 6.$$

Man erinnere sich an den Satz von Pythagoras:
In einem rechtwinkligen Dreieck, in dem die Längen der Katheten, also der Seiten, die am rechten Winkel anliegen, a und b sind, gilt für die Länge c der Hypothenuse, also der Seite, die dem rechten Winkel genüber liegt, die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Insbesondere ist der Abstand des Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vom Nullpunkt genau $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\langle (a,b),(a,b)\rangle}$.



In höheren Dimensionen gilt das Entsprechende.
Daher nennen wir für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Zahl $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ den *Betrag* von v.
Der Betrag von v ist nichts anderes als der Abstand von v vom 0-Punkt.
Der Betrag $|\lambda|$ einer reellen Zahl λ ist der Wert den man erhält, wenn man das Vorzeichen von λ weglässt.
So ist $|-5| = 5$, $|2.5| = 2.5$ und $|0| = 0$.

Der folgende Satz fasst die Eigenschaften des Standardsskalarprodukts und des Betrages zusammen.

Satz 8.7

a) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Dann gelten folgende Aussagen für alle $\alpha \in K$ und alle $u, v, w \in K^n$:

1. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
2. $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$
3. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen:

1. $|v| \geq 0$
2. $|v| = 0 \Leftrightarrow v = (0, \ldots, 0)$
3. $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$
4. $|v + w| \leq |v| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Definition 8.8

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper.Eine *$m \times n$-Matrix* über K ist ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei die a_{ij} Elemente von K sind.
Wir schreiben eine solche Matrix kürzer $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq j \leq n}$ oder auch einfach (a_{ij}), wenn die Dimension $m \times n$ der Matrix klar ist.

In einer Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq j \leq n}$ nennen wir $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ die i-te Zeile und

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die j-te Spalte.
Die Menge der $m \times n$-Matrizen über dem Körper K bezeichnen wir mit $K^{m \times n}$.

Definition 8.9

Für zwei $m \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ über einem Körper K sei $A + B$ die Matrix $(a_{ij} + b_{ij})$.
Der Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte der Matrix $A + B$ lautet also $a_{ij} + b_{ij}$.
Die $m \times n$-Matrix, deren Einträge alle 0 sind, nennen wir eine Nullmatrix.

Für $\alpha \in K$ und $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ sei

$$\alpha A := (\alpha a_{ij}).$$

Wie im Falle von K^n sieht man schnell, dass $(K^{m \times n}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

Neben der Addition von Matrizen und der Multiplikation von Matrizen gibt es eine weitere Verknüpfung von Matrizen, die fast noch wichtiger ist als die beiden schon genannten Operationen, nämlich die Matrizenmultiplikation.

Definition 8.10

Sei K ein Körper und seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$.
Weiter sei $A = (a_{ij}) \in K^{\ell \times m}$ und $B = (b_{jk}) \in K^{m \times n}$.
Dann ist $AB = A \cdot B$ die $\ell \times n$-Matrix $C = (c_{ik})$, deren Eintrag c_{ik} das Körperelement

$$a_{i1} b_{1k} + \cdots + a_{im} b_{mk},$$

also das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B, ist.
Es gilt also

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right)_{1 \leq i \leq \ell \wedge 1 \leq k \leq n} .$$

Eine wichtige, nichttriviale Eigenschaft der Matrizenmultiplikation ist die Assoziativität.

Satz 8.11

Sei K ein Körper und seien $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$.
Sind $A \in K^{k\times\ell}$, $B \in K^{\ell\times m}$ und $C \in K^{m\times n}$, so gilt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Betrachtet man $n \times n$-Matrizen für ein festes n, so kann man die Matrizen in beliebiger Reihenfolge multiplizieren.

Satz 8.12

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper. Dann ist $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ein Ring, der Ring der $n \times n$-Matrizen über K*.*

Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation in $K^{n\times n}$ ist die *Einheitsmatrix*

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

bei der auf der Diagonalen Einsen stehen und sonst nur Nullen.

Die Einheitengruppe des Matrizenringes $K^{n\times n}$ sind die *invertierbaren Matrizen*. Der Matrizenring $K^{n\times n}$ ist für $n > 1$ nicht kommutativ.

Matrizen und ihre Multiplikation spielen eine wesentliche Rolle beim Lösen linearer Gleichungssystem und damit zum Beispiel auch in der Optimierung oder für bildgebende Verfahren.

In der Graphentheorie kann man Matrizenmultiplikation zum berechnen von Wegen in Graphen einsetzen.

Matrizen spielen auch eine wesentliche Rolle im Page-Rank-Algorithmus mit dem zum Beispiel Google die Reihenfolge der Suchergebnisse festlegt.

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Beispiel 8.13

Die Gleichung

$$2x - 3 = 5$$

ist eine *lineare Gleichung* in der Variablen x.
Diese Gleichung lässt sich leicht umformen zu der Gleichung

$$2x = 8.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $x = 4$.
Die Zahl 4 *löst* also die Gleichung.

Im Allgemeinen lässt sich eine lineare Gleichung in einer Unbekannten in der Form

$$ax = b$$

schreiben.
Dabei ist x die *Unbekannte* bzw. *Variable*.
Die *Koeffizienten* a und b sind Elemente eines festen Körpers K.

Unsere Diskussion linearer Gleichungen und Systeme lineare Gleichungen bezieht sich im Prinzip auf Gleichungen mit Koeffizienten in beliebigen Körpern.
Konkrete Beispiele werden jedoch immer reelle Koeffizienten haben.

Beispiel 8.14

Die Gleichung

$$4x - 2y = 1$$

ist eine lineare Gleichung in den zwei Variablen x und y.
Wir bringen y auf die rechte Seite und erhalten

$$2y = 4x - 1.$$

Division durch 2 liefert

$$y = 2x - \frac{1}{2}.$$

Lösungen dieser Gleichung sind alle Paare (x, y) der Form

$$\left(t, 2t - \frac{1}{2}\right),$$

wobei der *Parameter* t eine reelle Zahl ist.

Die *Lösungsmenge* der Gleichung ist also die Menge

$$\left\{\left(t, 2t - \frac{1}{2}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Definition 8.15

a) Eine *lineare Gleichung* in den *Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

wobei die *Koeffizienten* a_i Elemente eines festen Körpers K sind. Die *Lösungsmenge* der Gleichung ist die Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}.$$

b) Ein *lineares Gleichungssystem* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht aus mehreren linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ *löst* das Gleichungssystem, wenn $(x_1, \ldots, x_n)$ jede der m linearen Gleichungen erfüllt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

Das Gleichungssystem heißt *konsistent* oder *lösbar*, falls überhaupt eine Lösung existiert.
Das Gleichungssystem heißt *inkonsistent* oder *unlösbar*, falls keine Lösung existiert.

Das Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ gilt.
Jedes homogene Gleichungssystem hat die *triviale Lösung* $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$.
Ein homogenes Gleichungssystem kann aber außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen haben.
Wir nennen zwei lineare Gleichungssysteme in denselben Variablen *äquivalent*, falls sie dieselben Lösungsmengen haben.

In einer Matrix $(a_{ij})_{1\leq i\leq m\wedge 1\leq j\leq n}$ nennen wir $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ die i-te Zeile und

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die j-te Spalte.
Die Menge der $m\times n$-Matrizen über dem Körper K bezeichnen wir mit $K^{m\times n}$.

Einem linearen Gleichungssystem können wir nun verschiedene Matrizen zuordnen.

Definition 8.16

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat die *Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8.17

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elementare Umformungen und Zeilenstufenform

Im Folgenden werden wir sehen, wie man lineare Gleichungssysteme löst, wie man einem Gleichungssystem ansieht, ob es lösbar ist, und wie die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystem aussieht. Dazu benutzen wir *elementare Gleichungsumformungen* bzw. *elementare Zeilenumformungen*.

Definition 8.18

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Die folgenden Operationen nennen wir *elementare Gleichungsumformungen*:

1. Vertauschen zweier Gleichungen
2. Multiplikation einer Gleichung mit einer von 0 verschiedenen Konstante
3. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Beispiel 8.19

Wir betrachten wieder das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vertauschen der letzten beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Aktuelles Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit 2 liefert

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Aktuelles Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Addition des (-1)-fachen der dritten Zeile zur ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} -2x_2 + 7x_3 &= 17 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Satz 8.20

Elementare Gleichungsumformungen ändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht.
D.h., zwei Gleichungssysteme, die durch elementare Gleichungsumformungen auseinander hervorgehen, haben dieselben Lösungsmengen.

Die elementaren Gleichungsumformungen eines linearen Gleichungssystems entsprechen *elementaren Zeilenumformungen* der erweiterten Koeffizientenmatrix:

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einer von 0 verschiedenen Konstanten
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Beispiel 8.21

Wir betrachten die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus Beispiel **??**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Vertauschen der letzten beiden Zeilen liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aktuelle Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit 2 liefert

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aktuelle Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Addition des (-1)-fachen der dritten Gleichung zur ersten Gleichung liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & 17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 8.22

Eine Matrix ist in *Zeilenstufenform* wenn folgende Punkte erfüllt sind:

1. Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen unten in der Matrix.
2. Wenn eine Zeile nicht nur Nullen enthält, so ist der am weitesten links stehende, von Null verschiedene Eintrag eine Eins (die *führende* Eins dieser Zeile).
3. Für je zwei verschiedene Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten, steht die führende Eins der oberen Zeile echt weiter links als die führende Eins der unteren Zeile.

In einer Matrix in Zeilenstufenform stehen also in Spalten mit führenden Einsen unter den führenden Einsen nur Nullen.
Ist eine Matrix in Zeilenstufenform und stehen auch über den führenden Einsen nur Nullen, so ist die Matrix in *reduzierter Zeilenstufenform*.

Beispiel 8.23

Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform.
Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind nicht in Zeilenstufenform.

Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind in reduzierter Zeilenstufenform.

Ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform, so können wir leicht die Lösungsmenge des Gleichungssystems bestimmen.

Beispiel 8.24

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 &= 2 \\ x_2 - 7x_3 - x_4 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform. Wir formen die dritte Gleichung um und erhalten

$$x_3 = 1 - 2x_4.$$

Umformen der zweiten Gleichung liefert

$$x_2 = 3 + 7x_3 + x_4.$$

Anstelle von x_3 können wir $1 - 2x_4$ Einsetzen.
Das liefert

$$x_2 = 3 + 7(1 - 2x_4) + x_4 = 3 + 7 - 14x_4 + x_4 = 10 - 13x_4.$$

Durch Umformen der ersten Gleichung ergibt sich

$$x_1 = 2 - 4x_2 - 2x_3 - 9x_4.$$

Wieder können wir die bereits erhaltenen Ausdrücke für x_2 und x_3 einsetzen. Das liefert

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 4(10 - 13x_4) - 2(1 - 2x_4) - 9x_4 \\ &= 2 - 40 + 52x_4 - 2 + 4x_4 - 9x_4 = -40 + 47x_4. \end{aligned}$$

Das heißt, dass x_1, x_2 und x_3 durch x_4 eindeutig bestimmt sind. Dieses Verfahren nennen wir *Rückwärtseinsetzen*.

Wir führen feinen Parameter $t \in \mathbb{R}$ ein und setzen $x_4 := t$.
Dann ergibt sich $x_3 = 1 - 2t$, $x_2 = 10 - 13t$ und $x_1 = -40 + 47t$.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist die Menge

$$\{(-40 + 47t, 10 - 13t, 1 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir nennen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-40 + 47t, 10 - 13t, 1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, die *allgemeine Lösung* des Gleichungssystem in *Parameterform*.

Definition 8.25

Ist ein Gleichungssystem in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, dessen Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform ist, so nennen wir die Variablen, die zu Spalten mit führenden Einsen gehören, *führende Variablen*. Die anderen Variablen heißen *freie Variablen*.

Im vorherigen Beispiel ist die Variable x_4 frei, alle anderen sind führend. Die Werte der freien Variablen können wir frei wählen und erhalten immer eine entsprechende Lösung des Gleichungssystems. Die Lösungswerte der führenden Variablen ergeben sich aus den gewählten Werten der freien Variablen.

Wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems reduzierte Zeilenstufenform hat, dann ist es noch einfacher, die allgemeine Lösung zu bestimmen.

Beispiel 8.26

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die reduzierte Zeilenstufenform hat.

Die führenden Variablen sind x_1 und x_3. Die Variable x_2 ist frei. Durch die zweite Gleichung ist x_3 bereits eindeutig bestimmt. Die erste Gleichung liefert $x_1 = 4 - 2x_2$.
Führen wir wieder einen Parameter t ein und setzen $x_2 := t$, so erhalten wir die allgemeine Lösung $(4 - 2t, t, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Im Unterschied zum Beispiel **??** können wir die Lösung des Gleichungssystems in diesem Falle direkt ablesen und ein Rückwärtseinsetzen ist unnötig.

Satz 8.27

Mittels elementarer Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix über einem Körper K in eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform überführen. Der folgende Algorithmus, das Gauß-Jordan-Verfahren, *leistet das Gewünschte:*

1. Bestimme die am weitesten links stehende Spalte der Matrix, die von Null verschiedene Werte enthält.
2. Ist der oberste Eintrag der gefundenen Spalte eine Null, so vertausche die oberste Zeile mit einer geeigneten Zeile, die in dieser Spalte keine Null hat.
3. In der bestrachteten Spalte ist nun der oberste Eintrag ein von Null verschiedenes Körperelement a. Dividiere die erste Zeile der Matrix durch a und erzeuge so eine führende Eins.
4. Addiere das jeweils passende Vielfache der ersten Zeile zu den anderen Zeilen, so dass alle Einträge unter der führenden Eins der ersten Zeile Null werden.
5. Wende die Schritte (1)–(4) auf die Matrix an, die man durch Streichen der ersten Zeile erhält und iteriere das Verfahren bis die Matrix Zeilenstufenform hat.
6. Mit der letzten nicht verschwindenen Zeile beginnend, addiere geeignete Vielfache dieser Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Wir können nun lineare Gleichungssysteme lösen, indem wir zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix nach dem Gauß-Jordan-Verfahren in reduzierte Zeilenstufenform bringen und dann die Lösungen des Gleichungssystems an dieser erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen.

In manchen Fällen ist es günstiger, den Schritt (6) wegzulassen und die Lösungen eines Gleichungssystems anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform durch Rückwärtseinsetzen zu bestimmen. Diese Variante des Gauß-Jordan-Verfahrens nennt man das *Gauß-Verfahren*.