Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2017/2018

25. Januar 2018

Polynome

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.
Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.
Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.
Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.
Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.
Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.

Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Polynomdivision

Für Polynome können wir die Teilbarkeitsrelation wie für ganze Zahlen definieren.

Definition 8.1

Seien p und q Polynome über einem Körper K.
Wir sagen, dass p das Polynom q teilt, wenn es ein Polynom r über K gibt, so dass $q = p \cdot r$ gilt.
In diesem Falle heißt q ein *Vielfaches* von p und wir schreiben $p|q$.

Ein Polynom r ist ein *gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r sowohl p als auch q teilt.
Das Polynom r ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von p und q, wenn r ein gemeinsamer Teiler von p und q von maximalem Grad ist.

Beispiel 8.2

a) Wir rechnen wieder über $\mathbb{Z}_5$.
Die Gleichung

$$(X^3 + 3X^2 + 2) \cdot (2X^2 - X + 4) = 2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3,$$

zeigt, dass $X^3 + 3X^2 + 2$ und $2X^2 - X + 4$ Teiler von $2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ sind.

b) Wir rechnen über $\mathbb{R}$.
Die Zahlen 2.5 und π, aufgefasst als konstante Polynome, werden beide von allen reellen Zahlen $\neq 0$ geteilt.
Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nämlich $2.5 = a \cdot \frac{2.5}{a}$ und $\pi = a \cdot \frac{\pi}{a}$.

Beispiel 8.2

a) Wir rechnen wieder über $\mathbb{Z}_5$.
Die Gleichung

$$(X^3 + 3X^2 + 2) \cdot (2X^2 - X + 4) = 2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3,$$

zeigt, dass $X^3 + 3X^2 + 2$ und $2X^2 - X + 4$ Teiler von $2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ sind.

b) Wir rechnen über $\mathbb{R}$.
Die Zahlen 2.5 und π, aufgefasst als konstante Polynome, werden beide von allen reellen Zahlen $\neq 0$ geteilt.
Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nämlich $2.5 = a \cdot \frac{2.5}{a}$ und $\pi = a \cdot \frac{\pi}{a}$.

Beispiel 8.2

a) Wir rechnen wieder über $\mathbb{Z}_5$.
Die Gleichung

$$(X^3 + 3X^2 + 2) \cdot (2X^2 - X + 4) = 2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3,$$

zeigt, dass $X^3 + 3X^2 + 2$ und $2X^2 - X + 4$ Teiler von $2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ sind.

b) Wir rechnen über $\mathbb{R}$.
Die Zahlen 2.5 und π, aufgefasst als konstante Polynome, werden beide von allen reellen Zahlen $\neq 0$ geteilt.
Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nämlich $2.5 = a \cdot \frac{2.5}{a}$ und $\pi = a \cdot \frac{\pi}{a}$.

Beispiel 8.2

a) Wir rechnen wieder über $\mathbb{Z}_5$.
Die Gleichung

$$(X^3 + 3X^2 + 2) \cdot (2X^2 - X + 4) = 2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3,$$

zeigt, dass $X^3 + 3X^2 + 2$ und $2X^2 - X + 4$ Teiler von $2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ sind.

b) Wir rechnen über $\mathbb{R}$.
Die Zahlen 2.5 und π, aufgefasst als konstante Polynome, werden beide von allen reellen Zahlen $\neq 0$ geteilt.
Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nämlich $2.5 = a \cdot \frac{2.5}{a}$ und $\pi = a \cdot \frac{\pi}{a}$.

Beispiel 8.2

a) Wir rechnen wieder über $\mathbb{Z}_5$.
Die Gleichung

$$(X^3 + 3X^2 + 2) \cdot (2X^2 - X + 4) = 2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3,$$

zeigt, dass $X^3 + 3X^2 + 2$ und $2X^2 - X + 4$ Teiler von $2X^5 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ sind.

b) Wir rechnen über $\mathbb{R}$.
Die Zahlen 2.5 und π, aufgefasst als konstante Polynome, werden beide von allen reellen Zahlen $\neq 0$ geteilt.
Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nämlich $2.5 = a \cdot \frac{2.5}{a}$ und $\pi = a \cdot \frac{\pi}{a}$.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\operatorname{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\mathrm{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\operatorname{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\mathrm{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\mathrm{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\mathrm{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad ≥ 1 und jedes $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $r \neq 0$ ist $\mathrm{grad}(p \cdot r) \geq 1$ und damit $p \cdot r \neq 2.5$.
Die Zahl 2.5 wird also nur von konstanten Polynomen geteilt, aber von allen von 0 verschiedenen konstanten Polynomen.
Dasselbe gilt für π.
Damit sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$ größte gemeinsame Teiler von 2.5 und π.
Insbesondere sind größte gemeinsame Teiler in Polynomringen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Wir sehen auch, dass genau die konstanten Polynome, die von 0 verschieden sind, im Polynomring ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzen.
In der Tat ist für jeden Körper K die Einheitengruppe $E(K[X])$ genau die Menge der von 0 verschiedenen, konstanten Polynome.

Wie im Falle von $\mathbb{Z}$ lassen sich größte gemeinsame Teiler in $K[X]$ mit dem euklidischen Algorithmus bestimmen.

Dazu müssen wir zunächst die Division mit Rest von Polynomen einführen, die sogenannte *Polynomdivision*.

Satz 8.3

Seien p und m Polynome über einem Körper K. Ist $m \neq 0$, so existieren Polynome q und r über K mit $p = q \cdot m + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$.

Wie im Falle von $\mathbb{Z}$ lassen sich größte gemeinsame Teiler in $K[X]$ mit dem euklidischen Algorithmus bestimmen.
Dazu müssen wir zunächst die Division mit Rest von Polynomen einführen, die sogenannte *Polynomdivision*.

Satz 8.3

Seien p und m Polynome über einem Körper K. Ist $m \neq 0$, so existieren Polynome q und r über K mit $p = q \cdot m + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$.

Wie im Falle von $\mathbb{Z}$ lassen sich größte gemeinsame Teiler in $K[X]$ mit dem euklidischen Algorithmus bestimmen.
Dazu müssen wir zunächst die Division mit Rest von Polynomen einführen, die sogenannte *Polynomdivision*.

Satz 8.3

Seien p und m Polynome über einem Körper K. Ist $m \neq 0$, so existieren Polynome q und r über K mit $p = q \cdot m + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$.

Wie im Falle von $\mathbb{Z}$ lassen sich größte gemeinsame Teiler in $K[X]$ mit dem euklidischen Algorithmus bestimmen.
Dazu müssen wir zunächst die Division mit Rest von Polynomen einführen, die sogenannte *Polynomdivision*.

Satz 8.3

Seien p und m Polynome über einem Körper K. Ist $m \neq 0$, so existieren Polynome q und r über K mit $p = q \cdot m + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.
Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.
Ist $\text{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.
Induktionsanfang: Ist $\text{grad}(p) < \text{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.

Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.

Ist $\mathrm{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.

Induktionsanfang: Ist $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.
Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.
Ist $\mathrm{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.
Induktionsanfang: Ist $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.
Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.
Ist $\operatorname{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.
Induktionsanfang: Ist $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.
Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.
Ist $\operatorname{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.
Induktionsanfang: Ist $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.
Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.
Ist $\operatorname{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.
Induktionsanfang: Ist $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Beweis. Ist m konstant, also zum Beispiel $m = b_0 \in K$ so setzen wir

$$q := \frac{a_n}{b_0} X^n + \cdots + \frac{a_0}{b_0}$$

und $r := 0$.
Dann gilt $p = q \cdot m + r$ und die Gradbedingung ist erfüllt.
Ist $\operatorname{grad}(m) \geq 1$, so beweisen wir den Satz durch vollständige Induktion über den Grad von p.
Induktionsanfang: Ist $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(m)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := p$. Dann gilt $p = q \cdot m + r$, wobei r die gewünschte Gradbedingung erfüllt.

Induktionsschritt:

Sei nun der Grad von p ist mindestens so hoch wie der Grad von m. Wir nehmen an, dass für alle Polynome p' mit $\operatorname{grad}(p') < \operatorname{grad}(p)$ Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\operatorname{grad}(r') < \operatorname{grad}(m)$ existieren (Induktionsannahme).

Wir suchen Polynome q und r mit $p = q \cdot m + r$ und $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(m)$.

Sei $n = \operatorname{grad}(p)$, $k = \operatorname{grad}(m)$, $p = a_n X^n + \cdots + a_0$ und $m = b_k X^k + \cdots + b_0$.

Wir setzen

$$p' := p - \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m$$

und berechnen den Koeffizienten c_n von X^n in p'.

Induktionsschritt:

Sei nun der Grad von p ist mindestens so hoch wie der Grad von m.
Wir nehmen an, dass für alle Polynome p' mit $\text{grad}(p') < \text{grad}(p)$ Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\text{grad}(r') < \text{grad}(m)$ existieren (Induktionsannahme).
Wir suchen Polynome q und r mit $p = q \cdot m + r$ und $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$.
Sei $n = \text{grad}(p)$, $k = \text{grad}(m)$, $p = a_n X^n + \cdots + a_0$ und $m = b_k X^k + \cdots + b_0$.
Wir setzen

$$p' := p - \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m$$

und berechnen den Koeffizienten c_n von X^n in p'.

Induktionsschritt:
Sei nun der Grad von p ist mindestens so hoch wie der Grad von m. Wir nehmen an, dass für alle Polynome p' mit $\text{grad}(p') < \text{grad}(p)$ Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\text{grad}(r') < \text{grad}(m)$ existieren (Induktionsannahme).
Wir suchen Polynome q und r mit $p = q \cdot m + r$ und $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$.
Sei $n = \text{grad}(p)$, $k = \text{grad}(m)$, $p = a_n X^n + \cdots + a_0$ und $m = b_k X^k + \cdots + b_0$.
Wir setzen

$$p' := p - \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m$$

und berechnen den Koeffizienten c_n von X^n in p'.

Induktionsschritt:
Sei nun der Grad von p ist mindestens so hoch wie der Grad von m. Wir nehmen an, dass für alle Polynome p' mit $\operatorname{grad}(p') < \operatorname{grad}(p)$ Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\operatorname{grad}(r') < \operatorname{grad}(m)$ existieren (Induktionsannahme).
Wir suchen Polynome q und r mit $p = q \cdot m + r$ und $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(m)$.
Sei $n = \operatorname{grad}(p)$, $k = \operatorname{grad}(m)$, $p = a_n X^n + \cdots + a_0$ und $m = b_k X^k + \cdots + b_0$.
Wir setzen

$$p' := p - \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m$$

und berechnen den Koeffizienten c_n von X^n in p'.

Induktionsschritt:
Sei nun der Grad von p ist mindestens so hoch wie der Grad von m. Wir nehmen an, dass für alle Polynome p' mit $\text{grad}(p') < \text{grad}(p)$ Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\text{grad}(r') < \text{grad}(m)$ existieren (Induktionsannahme).
Wir suchen Polynome q und r mit $p = q \cdot m + r$ und $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$.
Sei $n = \text{grad}(p)$, $k = \text{grad}(m)$, $p = a_n X^n + \cdots + a_0$ und $m = b_k X^k + \cdots + b_0$.
Wir setzen

$$p' := p - \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m$$

und berechnen den Koeffizienten c_n von X^n in p'.

Induktionsschritt:
Sei nun der Grad von p ist mindestens so hoch wie der Grad von m. Wir nehmen an, dass für alle Polynome p' mit $\mathrm{grad}(p') < \mathrm{grad}(p)$ Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(m)$ existieren (Induktionsannahme).
Wir suchen Polynome q und r mit $p = q \cdot m + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$.
Sei $n = \mathrm{grad}(p)$, $k = \mathrm{grad}(m)$, $p = a_n X^n + \cdots + a_0$ und $m = b_k X^k + \cdots + b_0$.
Wir setzen

$$p' := p - \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m$$

und berechnen den Koeffizienten c_n von X^n in p'.

$X^{n-k} \cdot m$ ist ein Polynom vom Grad $n - k + k = n$ mit dem Leitkoeffizienten b_k.
Damit ist $c_n = a_n - \frac{a_n}{b_k} \cdot b_k = 0$.
Also ist p' ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p') < n = \mathrm{grad}(p)$.
Nach Induktionsannahme existieren Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(m)$.
Nach Wahl von p' gilt

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + p'.$$

Dabei ist $\frac{a_n}{b_k} \cdot x^{n-k} \cdot m$ ein Polynom, in dem die Koeffizienten von $1, \ldots, x^k$ alle 0 sind.

$X^{n-k} \cdot m$ ist ein Polynom vom Grad $n - k + k = n$ mit dem Leitkoeffizienten b_k.
Damit ist $c_n = a_n - \frac{a_n}{b_k} \cdot b_k = 0$.
Also ist p' ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p') < n = \mathrm{grad}(p)$.
Nach Induktionsannahme existieren Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(m)$.
Nach Wahl von p' gilt

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + p'.$$

Dabei ist $\frac{a_n}{b_k} \cdot x^{n-k} \cdot m$ ein Polynom, in dem die Koeffizienten von $1, \ldots, x^k$ alle 0 sind.

$X^{n-k} \cdot m$ ist ein Polynom vom Grad $n - k + k = n$ mit dem Leitkoeffizienten b_k.
Damit ist $c_n = a_n - \frac{a_n}{b_k} \cdot b_k = 0$.
Also ist p' ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p') < n = \mathrm{grad}(p)$.
Nach Induktionsannahme existieren Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(m)$.
Nach Wahl von p' gilt

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + p'.$$

Dabei ist $\frac{a_n}{b_k} \cdot x^{n-k} \cdot m$ ein Polynom, in dem die Koeffizienten von $1, \ldots, x^k$ alle 0 sind.

$X^{n-k} \cdot m$ ist ein Polynom vom Grad $n - k + k = n$ mit dem Leitkoeffizienten b_k.
Damit ist $c_n = a_n - \frac{a_n}{b_k} \cdot b_k = 0$.
Also ist p' ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p') < n = \mathrm{grad}(p)$.
Nach Induktionsannahme existieren Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(m)$.
Nach Wahl von p' gilt

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + p'.$$

Dabei ist $\frac{a_n}{b_k} \cdot x^{n-k} \cdot m$ ein Polynom, in dem die Koeffizienten von $1, \dots, x^k$ alle 0 sind.

$X^{n-k} \cdot m$ ist ein Polynom vom Grad $n - k + k = n$ mit dem Leitkoeffizienten b_k.
Damit ist $c_n = a_n - \frac{a_n}{b_k} \cdot b_k = 0$.
Also ist p' ein Polynom mit $\text{grad}(p') < n = \text{grad}(p)$.
Nach Induktionsannahme existieren Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\text{grad}(r') < \text{grad}(m)$.
Nach Wahl von p' gilt

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + p'.$$

Dabei ist $\frac{a_n}{b_k} \cdot x^{n-k} \cdot m$ ein Polynom, in dem die Koeffizienten von $1, \ldots, x^k$ alle 0 sind.

$X^{n-k} \cdot m$ ist ein Polynom vom Grad $n - k + k = n$ mit dem Leitkoeffizienten b_k.
Damit ist $c_n = a_n - \frac{a_n}{b_k} \cdot b_k = 0$.
Also ist p' ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p') < n = \mathrm{grad}(p)$.
Nach Induktionsannahme existieren Polynome q' und r' mit $p' = q' \cdot m + r'$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(m)$.
Nach Wahl von p' gilt

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + p'.$$

Dabei ist $\frac{a_n}{b_k} \cdot x^{n-k} \cdot m$ ein Polynom, in dem die Koeffizienten von $1, \ldots, x^k$ alle 0 sind.

Setzt man nun für p' den Ausdruck $q' \cdot m + r'$ ein, so ergibt sich

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + q' \cdot m + r' = \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q' \right) \cdot m + r'.$$

Wir setzen $r := r'$ und $q := \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q' \right)$. Nun gilt $p = q \cdot m + r$, wobei die Gradbedingung $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(m)$ erfüllt ist.

Das beendet den Induktionsschritt.

Setzt man nun für p' den Ausdruck $q' \cdot m + r'$ ein, so ergibt sich

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + q' \cdot m + r' = \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'\right) \cdot m + r'.$$

Wir setzen $r := r'$ und $q := \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'\right)$. Nun gilt $p = q \cdot m + r$, wobei die Gradbedingung $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$ erfüllt ist.

Das beendet den Induktionsschritt.

Setzt man nun für p' den Ausdruck $q' \cdot m + r'$ ein, so ergibt sich

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + q' \cdot m + r' = \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q' \right) \cdot m + r'.$$

Wir setzen $r := r'$ und $q := \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q' \right)$. Nun gilt $p = q \cdot m + r$, wobei die Gradbedingung $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$ erfüllt ist.

Das beendet den Induktionsschritt.

Setzt man nun für p' den Ausdruck $q' \cdot m + r'$ ein, so ergibt sich

$$p = \frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} \cdot m + q' \cdot m + r' = \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q' \right) \cdot m + r'.$$

Wir setzen $r := r'$ und $q := \left(\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q' \right)$. Nun gilt $p = q \cdot m + r$, wobei die Gradbedingung $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$ erfüllt ist.
Das beendet den Induktionsschritt.

Bemerkung 8.4

Sei $\text{grad}(p) \geq \text{grad}(m) \geq 1$.

Im Beweis von Satz 8.3 haben wir gesehen, dass es Polynome q und r mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$ und $p = q \cdot m + r$ gibt, wobei q die Form $\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'$ hat.

Dabei gilt $p' = q' \cdot m + r'$ für ein Polynom p' mit $\text{grad}(p') < \text{grad}(p)$.

Also ist der Grad von q' kleiner als $n - k$, wobei n der Grad von p und k der Grad von m ist.

Damit ist $\frac{a_n}{b_k}$ der Leitkoeffizient von q.

Außerdem ist der Rest r bei der Division von p durch m einfach das Polynom r', also der Rest bei der Division von p' durch m.

Bemerkung 8.4

Sei $\text{grad}(p) \geq \text{grad}(m) \geq 1$.
Im Beweis von Satz 8.3 haben wir gesehen, dass es Polynome q und r mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(m)$ und $p = q \cdot m + r$ gibt, wobei q die Form $\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'$ hat.
Dabei gilt $p' = q' \cdot m + r'$ für ein Polynom p' mit $\text{grad}(p') < \text{grad}(p)$.
Also ist der Grad von q' kleiner als $n - k$, wobei n der Grad von p und k der Grad von m ist.
Damit ist $\frac{a_n}{b_k}$ der Leitkoeffizient von q.

Außerdem ist der Rest r bei der Division von p durch m einfach das Polynom r', also der Rest bei der Division von p' durch m.

Bemerkung 8.4

Sei $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(m) \geq 1$.
Im Beweis von Satz 8.3 haben wir gesehen, dass es Polynome q und r mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$ und $p = q \cdot m + r$ gibt, wobei q die Form $\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'$ hat.
Dabei gilt $p' = q' \cdot m + r'$ für ein Polynom p' mit $\mathrm{grad}(p') < \mathrm{grad}(p)$.
Also ist der Grad von q' kleiner als $n - k$, wobei n der Grad von p und k der Grad von m ist.
Damit ist $\frac{a_n}{b_k}$ der Leitkoeffizient von q.

Außerdem ist der Rest r bei der Division von p durch m einfach das Polynom r', also der Rest bei der Division von p' durch m.

Bemerkung 8.4

Sei $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(m) \geq 1$.
Im Beweis von Satz 8.3 haben wir gesehen, dass es Polynome q und r mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$ und $p = q \cdot m + r$ gibt, wobei q die Form $\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'$ hat.
Dabei gilt $p' = q' \cdot m + r'$ für ein Polynom p' mit $\mathrm{grad}(p') < \mathrm{grad}(p)$.
Also ist der Grad von q' kleiner als $n - k$, wobei n der Grad von p und k der Grad von m ist.
Damit ist $\frac{a_n}{b_k}$ der Leitkoeffizient von q.

Außerdem ist der Rest r bei der Division von p durch m einfach das Polynom r', also der Rest bei der Division von p' durch m.

Bemerkung 8.4

Sei $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(m) \geq 1$.
Im Beweis von Satz 8.3 haben wir gesehen, dass es Polynome q und r mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$ und $p = q \cdot m + r$ gibt, wobei q die Form $\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'$ hat.
Dabei gilt $p' = q' \cdot m + r'$ für ein Polynom p' mit $\mathrm{grad}(p') < \mathrm{grad}(p)$.
Also ist der Grad von q' kleiner als $n - k$, wobei n der Grad von p und k der Grad von m ist.
Damit ist $\frac{a_n}{b_k}$ der Leitkoeffizient von q.

Außerdem ist der Rest r bei der Division von p durch m einfach das Polynom r', also der Rest bei der Division von p' durch m.

Bemerkung 8.4

Sei $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(m) \geq 1$.
Im Beweis von Satz 8.3 haben wir gesehen, dass es Polynome q und r mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(m)$ und $p = q \cdot m + r$ gibt, wobei q die Form $\frac{a_n}{b_k} \cdot X^{n-k} + q'$ hat.
Dabei gilt $p' = q' \cdot m + r'$ für ein Polynom p' mit $\mathrm{grad}(p') < \mathrm{grad}(p)$.
Also ist der Grad von q' kleiner als $n - k$, wobei n der Grad von p und k der Grad von m ist.
Damit ist $\frac{a_n}{b_k}$ der Leitkoeffizient von q.

Außerdem ist der Rest r bei der Division von p durch m einfach das Polynom r', also der Rest bei der Division von p' durch m.

Polynomdivision. Seien zwei Polynome

$$p = a_n X^n + \cdots + a_0$$

und

$$m = b_k X^k + \cdots + b_0$$

über einem festen Körper K gegeben. Das Polynom m habe den Grad $k \geq 0$. Wir wollen Polynome q und r wie in Satz 8.3 bestimmen.

Ist $k = 0$, so ist p durch m teilbar und man erhält den Quotienten q, indem man jeden Koeffizienten von p durch $m \in K$ teilt. Der Rest ist in diesem Fall $r = 0$.

Polynomdivision. Seien zwei Polynome

$$p = a_n X^n + \cdots + a_0$$

und

$$m = b_k X^k + \cdots + b_0$$

über einem festen Körper K gegeben. Das Polynom m habe den Grad $k \geq 0$. Wir wollen Polynome q und r wie in Satz 8.3 bestimmen.

Ist $k = 0$, so ist p durch m teilbar und man erhält den Quotienten q, indem man jeden Koeffizienten von p durch $m \in K$ teilt. Der Rest ist in diesem Fall $r = 0$.

Polynomdivision. Seien zwei Polynome

$$p = a_n X^n + \cdots + a_0$$

und

$$m = b_k X^k + \cdots + b_0$$

über einem festen Körper K gegeben. Das Polynom m habe den Grad $k \geq 0$. Wir wollen Polynome q und r wie in Satz 8.3 bestimmen.

Ist $k = 0$, so ist p durch m teilbar und man erhält den Quotienten q, indem man jeden Koeffizienten von p durch $m \in K$ teilt. Der Rest ist in diesem Fall $r = 0$.

Polynomdivision. Seien zwei Polynome

$$p = a_n X^n + \cdots + a_0$$

und

$$m = b_k X^k + \cdots + b_0$$

über einem festen Körper K gegeben. Das Polynom m habe den Grad $k \geq 0$. Wir wollen Polynome q und r wie in Satz 8.3 bestimmen.

Ist $k = 0$, so ist p durch m teilbar und man erhält den Quotienten q, indem man jeden Koeffizienten von p durch $m \in K$ teilt. Der Rest ist in diesem Fall $r = 0$.

Nun nehmen wir an, dass $k \geq 1$ gilt.
Wir halten p und m im Laufe der Berechnung fest und verändern die Variablen $\bar{p}$ und $\bar{n}$.
Dabei seien $\bar{a}_{\bar{n}}, \ldots, \bar{a}_0$ immer die Koeffizienten des Polynoms $\bar{p}$.
Die Koeffizienten $c_{n-k}, \ldots, c_0$ des Quotienten q werden nach und nach berechnet, falls $n \geq k$ ist.

Nun nehmen wir an, dass $k \geq 1$ gilt.
Wir halten p und m im Laufe der Berechnung fest und verändern die Variablen $\bar{p}$ und $\bar{n}$.
Dabei seien $\bar{a}_{\bar{n}}, \ldots, \bar{a}_0$ immer die Koeffizienten des Polynoms $\bar{p}$.
Die Koeffizienten $c_{n-k}, \ldots, c_0$ des Quotienten q werden nach und nach berechnet, falls $n \geq k$ ist.

Nun nehmen wir an, dass $k \geq 1$ gilt.
Wir halten p und m im Laufe der Berechnung fest und verändern die Variablen $\bar{p}$ und $\bar{n}$.
Dabei seien $\bar{a}_{\bar{n}}, \ldots, \bar{a}_0$ immer die Koeffizienten des Polynoms $\bar{p}$.
Die Koeffizienten $c_{n-k}, \ldots, c_0$ des Quotienten q werden nach und nach berechnet, falls $n \geq k$ ist.

Nun nehmen wir an, dass $k \geq 1$ gilt.
Wir halten p und m im Laufe der Berechnung fest und verändern die Variablen $\bar{p}$ und $\bar{n}$.
Dabei seien $\bar{a}_{\bar{n}}, \dots, \bar{a}_0$ immer die Koeffizienten des Polynoms $\bar{p}$.
Die Koeffizienten $c_{n-k}, \dots, c_0$ des Quotienten q werden nach und nach berechnet, falls $n \geq k$ ist.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
   $$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
   $$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
$$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
$$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
   $$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
   $$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
   $$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
   $$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
   $$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
   $$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
   $$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
   $$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

1. Setze $\bar{n} := n$ und $\bar{p} := p$.
2. Ist $\bar{n} < k$, so ist $r = \bar{p}$ der Rest bei der Division von p durch m.
   Ist $n \geq k$, so ist $q = c_{n-k}X^{n-k} + \cdots + c_0$ der Quotient bei der Division von p durch m.
   Ist $n < k$, so ist lautet der Quotient $q = 0$ und es wurden auch keine c_i berechnet. Die Berechnung endet hier.
3. Ist $\bar{n} \geq k$, so speichere den Koeffizienten
   $$c_{\bar{n}-k} := \frac{\bar{a}_{\bar{n}}}{b_k}$$
   und setze
   $$\bar{p} := \bar{p} - c_{\bar{n}-k} \cdot X^{\bar{n}-k} \cdot m.$$
4. Ist $\bar{p}$ das Nullpolynom, so setze $\bar{n} := -\infty$ und fahre mit Schritt 2 fort.
5. Ist $\bar{p} \neq 0$, so setze $\bar{n} := \bar{n} - 1$ und fahre mit Schritt 2 fort.

Bemerkung 8.5

Seien p und m wie im Algorithmus zur Polynomdivision.
Wir nehmen an, dass $n \geq k \geq 1$ ist.
Dann kann man die Berechnung des Algorithmus wie folgt aufschreiben:
Wir starten mit der Zeile

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) =$$

Zunächst berechnen wir den Koeffizienten $c_{n-k} = \frac{a_n}{b_k}$ und tragen ihn zusammen mit der passenden Potenz X^{n-k} auf der rechten Seite ein. Das liefert

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) = \left(\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} + \ldots \right.$$

Bemerkung 8.5

Seien p und m wie im Algorithmus zur Polynomdivision.
Wir nehmen an, dass $n \geq k \geq 1$ ist.
Dann kann man die Berechnung des Algorithmus wie folgt aufschreiben:
Wir starten mit der Zeile

$$(a_n X^n + \dots + a_0) : (b_k X^k + \dots + b_0) =$$

Zunächst berechnen wir den Koeffizienten $c_{n-k} = \frac{a_n}{b_k}$ und tragen ihn zusammen mit der passenden Potenz X^{n-k} auf der rechten Seite ein. Das liefert

$$(a_n X^n + \dots + a_0) : (b_k X^k + \dots + b_0) = \left(\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} + \dots \right.$$

Bemerkung 8.5

Seien p und m wie im Algorithmus zur Polynomdivision.
Wir nehmen an, dass $n \geq k \geq 1$ ist.
Dann kann man die Berechnung des Algorithmus wie folgt aufschreiben:

Wir starten mit der Zeile

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) =$$

Zunächst berechnen wir den Koeffizienten $c_{n-k} = \frac{a_n}{b_k}$ und tragen ihn zusammen mit der passenden Potenz X^{n-k} auf der rechten Seite ein. Das liefert

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) = \left(\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} + \ldots \right.$$

Bemerkung 8.5

Seien p und m wie im Algorithmus zur Polynomdivision.
Wir nehmen an, dass $n \geq k \geq 1$ ist.
Dann kann man die Berechnung des Algorithmus wie folgt aufschreiben:
Wir starten mit der Zeile

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) =$$

Zunächst berechnen wir den Koeffizienten $c_{n-k} = \frac{a_n}{b_k}$ und tragen ihn zusammen mit der passenden Potenz X^{n-k} auf der rechten Seite ein. Das liefert

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) = \left(\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} + \ldots \right.$$

Bemerkung 8.5

Seien p und m wie im Algorithmus zur Polynomdivision.
Wir nehmen an, dass $n \geq k \geq 1$ ist.
Dann kann man die Berechnung des Algorithmus wie folgt aufschreiben:
Wir starten mit der Zeile

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) =$$

Zunächst berechnen wir den Koeffizienten $c_{n-k} = \frac{a_n}{b_k}$ und tragen ihn zusammen mit der passenden Potenz X^{n-k} auf der rechten Seite ein. Das liefert

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) = \Big(\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} + \ldots$$

Bemerkung 8.5

Seien p und m wie im Algorithmus zur Polynomdivision.
Wir nehmen an, dass $n \geq k \geq 1$ ist.
Dann kann man die Berechnung des Algorithmus wie folgt aufschreiben:
Wir starten mit der Zeile

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) =$$

Zunächst berechnen wir den Koeffizienten $c_{n-k} = \frac{a_n}{b_k}$ und tragen ihn zusammen mit der passenden Potenz X^{n-k} auf der rechten Seite ein. Das liefert

$$(a_n X^n + \cdots + a_0) : (b_k X^k + \cdots + b_0) = \left(\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} + \ldots \right.$$

Als nächstes multiplizieren wir m mit $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.
Das liefert ein Polynom vom Grad n, das wir unter das Polynom p schreiben.
Als nächstes ziehen wir $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k} \cdot m$ von p ab und schreiben das Ergebnis ebenfalls darunter.
Die dritte Zeile lautet nun

$$0 + \left(a_{n-1} - b_{k-1}\frac{a_n}{b_k}\right)X^{n-1} + \dots$$

Wir setzen dann die Polynomdivision mit dem Polynom in der dritten Zeile fort, und zwar solange bis der Grad der letzten Differenz kleiner als der Grad von m geworden ist.
Dabei schreiben wir die neu berechneten Terme c_iX^i von q oben rechts hinter den Ausdruck $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.

Als nächstes multiplizieren wir m mit $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.
Das liefert ein Polynom vom Grad n, das wir unter das Polynom p schreiben.
Als nächstes ziehen wir $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k} \cdot m$ von p ab und schreiben das Ergebnis ebenfalls darunter.
Die dritte Zeile lautet nun

$$0 + \left(a_{n-1} - b_{k-1}\frac{a_n}{b_k}\right)X^{n-1} + \dots$$

Wir setzen dann die Polynomdivision mit dem Polynom in der dritten Zeile fort, und zwar solange bis der Grad der letzten Differenz kleiner als der Grad von m geworden ist.
Dabei schreiben wir die neu berechneten Terme c_iX^i von q oben rechts hinter den Ausdruck $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.

Als nächstes multiplizieren wir m mit $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.
Das liefert ein Polynom vom Grad n, das wir unter das Polynom p schreiben.
Als nächstes ziehen wir $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k} \cdot m$ von p ab und schreiben das Ergebnis ebenfalls darunter.
Die dritte Zeile lautet nun

$$0 + \left(a_{n-1} - b_{k-1}\frac{a_n}{b_k}\right) X^{n-1} + \ldots$$

Wir setzen dann die Polynomdivision mit dem Polynom in der dritten Zeile fort, und zwar solange bis der Grad der letzten Differenz kleiner als der Grad von m geworden ist.
Dabei schreiben wir die neu berechneten Terme c_iX^i von q oben rechts hinter den Ausdruck $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.

Als nächstes multiplizieren wir m mit $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.
Das liefert ein Polynom vom Grad n, das wir unter das Polynom p schreiben.
Als nächstes ziehen wir $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k} \cdot m$ von p ab und schreiben das Ergebnis ebenfalls darunter.
Die dritte Zeile lautet nun

$$0 + \left(a_{n-1} - b_{k-1}\frac{a_n}{b_k}\right)X^{n-1} + \ldots$$

Wir setzen dann die Polynomdivision mit dem Polynom in der dritten Zeile fort, und zwar solange bis der Grad der letzten Differenz kleiner als der Grad von m geworden ist.
Dabei schreiben wir die neu berechneten Terme c_iX^i von q oben rechts hinter den Ausdruck $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.

Als nächstes multiplizieren wir m mit $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.
Das liefert ein Polynom vom Grad n, das wir unter das Polynom p schreiben.
Als nächstes ziehen wir $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k} \cdot m$ von p ab und schreiben das Ergebnis ebenfalls darunter.
Die dritte Zeile lautet nun

$$0 + \left(a_{n-1} - b_{k-1}\frac{a_n}{b_k}\right)X^{n-1} + \dots$$

Wir setzen dann die Polynomdivision mit dem Polynom in der dritten Zeile fort, und zwar solange bis der Grad der letzten Differenz kleiner als der Grad von m geworden ist.
Dabei schreiben wir die neu berechneten Terme c_iX^i von q oben rechts hinter den Ausdruck $\frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$.

Als nächstes multiplizieren wir m mit $\frac{a_n}{b_k} X^{n-k}$.
Das liefert ein Polynom vom Grad n, das wir unter das Polynom p schreiben.
Als nächstes ziehen wir $\frac{a_n}{b_k} X^{n-k} \cdot m$ von p ab und schreiben das Ergebnis ebenfalls darunter.
Die dritte Zeile lautet nun

$$0 + \left(a_{n-1} - b_{k-1} \frac{a_n}{b_k} \right) X^{n-1} + \dots$$

Wir setzen dann die Polynomdivision mit dem Polynom in der dritten Zeile fort, und zwar solange bis der Grad der letzten Differenz kleiner als der Grad von m geworden ist.
Dabei schreiben wir die neu berechneten Terme $c_i X^i$ von q oben rechts hinter den Ausdruck $\frac{a_n}{b_k} X^{n-k}$.

Am Schluss steht das gesamte Polynom q auf der rechten Seite der Gleichung und die Differenz in der letzten Zeile ist der Rest bei der Division von p durch m.

Damit das Gleichheitszeichen gerechtfertigt ist, tragen wir am Schluss der obersten Zeile noch den Summanden $\frac{r}{m}$.

Es ist übrigens nicht nötig, die Differenzen immer vollständig aufzuschreiben, da alle bis auf die ersten $k-1$ Summanden mit den entsprechenden Summanden von p übereinstimmen.

Am Schluss steht das gesamte Polynom q auf der rechten Seite der Gleichung und die Differenz in der letzten Zeile ist der Rest bei der Division von p durch m.
Damit das Gleichheitszeichen gerechtfertigt ist, tragen wir am Schluss der obersten Zeile noch den Summanden $\frac{r}{m}$.

Es ist übrigens nicht nötig, die Differenzen immer vollständig aufzuschreiben, da alle bis auf die ersten $k-1$ Summanden mit den entsprechenden Summanden von p übereinstimmen.

Am Schluss steht das gesamte Polynom q auf der rechten Seite der Gleichung und die Differenz in der letzten Zeile ist der Rest bei der Division von p durch m.
Damit das Gleichheitszeichen gerechtfertigt ist, tragen wir am Schluss der obersten Zeile noch den Summanden $\frac{r}{m}$.

Es ist übrigens nicht nötig, die Differenzen immer vollständig aufzuschreiben, da alle bis auf die ersten $k-1$ Summanden mit den entsprechenden Summanden von p übereinstimmen.

Beispiel 8.6

Wir rechnen über $\mathbb{Q}$.
a) Sei $p = X^3 - 2X^2 + 4X + 7$ und $m = X + 1$. Die Polynomdivision sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrrrl}
X^3 & -\,2X^2 & +\,4X & +\,7 & = (X+1)\,(X^2 - 3X + 7) \\
-\,X^3 & -\,X^2 & & & \\
\hline
& -\,3X^2 & +\,4X & & \\
& 3X^2 & +\,3X & & \\
\hline
& & 7X & +\,7 & \\
& & -\,7X & -\,7 & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

In diesem Fall ergibt sich der Rest 0. Insbesondere ist p durch m teilbar.

b) Sei $p = X^3 - 2X^2 + 5X + 6$ und $m = X^2 - X + 1$. Die Polynomdivision sieht dann wie folgt aus:

$$
\begin{array}{rl}
X^3 - 2X^2 + 5X + 6 & = \left(X^2 - X + 1\right)\left(X - 1\right) + 3X + 7 \\
\underline{-X^3 + X^2 - X \phantom{{}+6}} & \\
-X^2 + 4X + 6 & \\
\underline{X^2 - X + 1} & \\
3X + 7 &
\end{array}
$$

Hier ist der Quotient $X - 1$ und der Rest $3X + 7$.

Wie bei ganzen Zahlen kann man größte gemeinsame Teiler von Polynomen mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnen.
Dabei spielt der Grad die Rolle des Betrages bei den ganzen Zahlen.
Ein Unterschied zur Situation bei den ganzen Zahlen besteht darin, dass es durchaus passieren kann, dass zwei Polynomen denselben Grad haben, ohne dass die beiden Polynomen einander teilen.
In diesem Falle ist es egal, ob man zunächst das eine Polynom durch das andere teilt oder umgekehrt.

Wie bei ganzen Zahlen kann man größte gemeinsame Teiler von Polynomen mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnen. Dabei spielt der Grad die Rolle des Betrages bei den ganzen Zahlen.

Ein Unterschied zur Situation bei den ganzen Zahlen besteht darin, dass es durchaus passieren kann, dass zwei Polynomen denselben Grad haben, ohne dass die beiden Polynomen einander teilen. In diesem Falle ist es egal, ob man zunächst das eine Polynom durch das andere teilt oder umgekehrt.

Wie bei ganzen Zahlen kann man größte gemeinsame Teiler von Polynomen mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnen. Dabei spielt der Grad die Rolle des Betrages bei den ganzen Zahlen.
Ein Unterschied zur Situation bei den ganzen Zahlen besteht darin, dass es durchaus passieren kann, dass zwei Polynomen denselben Grad haben, ohne dass die beiden Polynomen einander teilen.
In diesem Falle ist es egal, ob man zunächst das eine Polynom durch das andere teilt oder umgekehrt.

Wie bei ganzen Zahlen kann man größte gemeinsame Teiler von Polynomen mit Hilfe des euklidischen Algorithmus berechnen.
Dabei spielt der Grad die Rolle des Betrages bei den ganzen Zahlen.
Ein Unterschied zur Situation bei den ganzen Zahlen besteht darin, dass es durchaus passieren kann, dass zwei Polynomen denselben Grad haben, ohne dass die beiden Polynomen einander teilen.
In diesem Falle ist es egal, ob man zunächst das eine Polynom durch das andere teilt oder umgekehrt.

Beispiel 8.7

Wir wollen einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$p = X^3 - 3X^2 + 5X - 3$$

und

$$q = X^3 - 1$$

bestimmen.

Eigentlich müssten wir beim euklidischen Algorithmus zunächst das Polynom vom höheren Grad durch das vom niedrigeren Grad teilen. Die beiden Grade sind aber gleich. Deshalb ist es egal, ob wir zunächst p durch q teilen oder umgekehrt. Wir starten mit der Division von p durch q.

Beispiel 8.7

Wir wollen einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$p = X^3 - 3X^2 + 5X - 3$$

und

$$q = X^3 - 1$$

bestimmen.

Eigentlich müssten wir beim euklidischen Algorithmus zunächst das Polynom vom höheren Grad durch das vom niedrigeren Grad teilen. Die beiden Grade sind aber gleich. Deshalb ist es egal, ob wir zunächst p durch q teilen oder umgekehrt. Wir starten mit der Division von p durch q.

Beispiel 8.7

Wir wollen einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$p = X^3 - 3X^2 + 5X - 3$$

und

$$q = X^3 - 1$$

bestimmen.
Eigentlich müssten wir beim euklidischen Algorithmus zunächst das Polynom vom höheren Grad durch das vom niedrigeren Grad teilen. Die beiden Grade sind aber gleich. Deshalb ist es egal, ob wir zunächst p durch q teilen oder umgekehrt. Wir starten mit der Division von p durch q.

$$
\begin{array}{rl}
X^3 - 3X^2 + 5X - 3 & = \left(X^3 - 1\right) 1 - 3X^2 + 5X - 2 \\
- X^3 \qquad\qquad\quad + 1 & \\
\hline
- 3X^2 + 5X - 2 &
\end{array}
$$

Der Rest ist also $-3X^2 + 5X - 2$. Also dividieren wir im nächsten Schritt q durch $-3X^2 + 5X - 2$.

$$
\begin{array}{rl}
X^3 - 3X^2 + 5X - 3 & = \left(X^3 - 1\right) 1 - 3X^2 + 5X - 2 \\
- X^3 \qquad\qquad\qquad + 1 & \\
\hline
- 3X^2 + 5X - 2 &
\end{array}
$$

Der Rest ist also $-3X^2 + 5X - 2$. Also dividieren wir im nächsten Schritt q durch $-3X^2 + 5X - 2$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
X^3 & & & -1 & = \left(-3X^2+5X-2\right)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{5}{9}\right)+\frac{19}{9}X-\frac{19}{9} \\
-X^3 & +\frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & & \\
\hline
& \frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & -1 & \\
& -\frac{5}{3}X^2 & +\frac{25}{9}X & -\frac{10}{9} & \\
\hline
& & \frac{19}{9}X & -\frac{19}{9} &
\end{array}
$$

Das liefert den Rest $\frac{19}{9}(X-1)$.
Man beachte, dass das Polynom $\frac{19}{9}(X-1)$ genau dieselben Teiler wie $X-1$ hat und auch genau dieselben Polynome teilt.
Damit können wir im nächsten Schritt der Einfachheit halber durch $X-1$ anstelle von $\frac{19}{9}(X-1)$ teilen.

$$\begin{array}{rrrrl}
X^3 & & & -1 & = \left(-3X^2+5X-2\right)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{5}{9}\right)+\frac{19}{9}X-\frac{19}{9} \\
-X^3 & +\frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & & \\
\hline
& \frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & -1 & \\
& -\frac{5}{3}X^2 & +\frac{25}{9}X & -\frac{10}{9} & \\
\hline
& & \frac{19}{9}X & -\frac{19}{9} &
\end{array}$$

Das liefert den Rest $\frac{19}{9}(X-1)$.

Man beachte, dass das Polynom $\frac{19}{9}(X-1)$ genau dieselben Teiler wie $X-1$ hat und auch genau dieselben Polynome teilt.

Damit können wir im nächsten Schritt der Einfachheit halber durch $X-1$ anstelle von $\frac{19}{9}(X-1)$ teilen.

$$\begin{array}{rrrrl}
X^3 & & & -1 & = \left(-3X^2+5X-2\right)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{5}{9}\right)+\frac{19}{9}X-\frac{19}{9} \\
-X^3 & +\frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & & \\
\hline
& \frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & -1 & \\
& -\frac{5}{3}X^2 & +\frac{25}{9}X & -\frac{10}{9} & \\
\hline
& & \frac{19}{9}X & -\frac{19}{9} &
\end{array}$$

Das liefert den Rest $\frac{19}{9}(X-1)$.

Man beachte, dass das Polynom $\frac{19}{9}(X-1)$ genau dieselben Teiler wie $X-1$ hat und auch genau dieselben Polynome teilt.

Damit können wir im nächsten Schritt der Einfachheit halber durch $X-1$ anstelle von $\frac{19}{9}(X-1)$ teilen.

$$
\begin{array}{lllll}
X^3 & & & -1 & = \big(-3X^2+5X-2\big)\big(-\tfrac{1}{3}X-\tfrac{5}{9}\big)+\tfrac{19}{9}X-\tfrac{19}{9} \\
-X^3 & +\frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & & \\
\hline
 & \frac{5}{3}X^2 & -\frac{2}{3}X & -1 & \\
 & -\frac{5}{3}X^2 & +\frac{25}{9}X & -\frac{10}{9} & \\
\hline
 & & \frac{19}{9}X & -\frac{19}{9} &
\end{array}
$$

Das liefert den Rest $\frac{19}{9}(X-1)$.
Man beachte, dass das Polynom $\frac{19}{9}(X-1)$ genau dieselben Teiler wie $X-1$ hat und auch genau dieselben Polynome teilt.
Damit können wir im nächsten Schritt der Einfachheit halber durch $X-1$ anstelle von $\frac{19}{9}(X-1)$ teilen.

$$\begin{array}{rcl}
-3X^2+5X-2 & = & (X-1)\,(-3X+2) \\
3X^2-3X\phantom{{}-2} & & \\
\hline
2X-2 & & \\
-2X+2 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

Der Rest ist dabei 0. Also ist $X-1$ ein größter gemeinsamer Teiler von p und q.

Polynomfunktionen und Nullstellen von Polynomen

Definition 8.8

Sei K ein Körper und $p = a_0 + \cdots + a_n X^n \in K[X]$.
Dann ist die Funktion

$$f_p : K \to K; x \mapsto a_0 + \cdots + a_n x^n$$

die zu p gehörige *Polynomfunktion*.

Man berechnet also f_p indem man ein gegebenes Körperelement x (nicht zu verwechseln mit der Unbestimmten X) für X in das Polynom einsetzt.

Polynomfunktionen und Nullstellen von Polynomen

Definition 8.8

Sei K ein Körper und $p = a_0 + \cdots + a_n X^n \in K[X]$.
Dann ist die Funktion

$$f_p : K \to K; x \mapsto a_0 + \cdots + a_n x^n$$

die zu p gehörige *Polynomfunktion*.

Man berechnet also f_p indem man ein gegebenes Körperelement x (nicht zu verwechseln mit der Unbestimmten X) für X in das Polynom einsetzt.

Polynomfunktionen und Nullstellen von Polynomen

Definition 8.8

Sei K ein Körper und $p = a_0 + \cdots + a_n X^n \in K[X]$.
Dann ist die Funktion

$$f_p : K \to K; x \mapsto a_0 + \cdots + a_n x^n$$

die zu p gehörige *Polynomfunktion*.

Man berechnet also f_p indem man ein gegebenes Körperelement x (nicht zu verwechseln mit der Unbestimmten X) für X in das Polynom einsetzt.

Polynomfunktionen und Nullstellen von Polynomen

Definition 8.8

Sei K ein Körper und $p = a_0 + \cdots + a_n X^n \in K[X]$.
Dann ist die Funktion

$$f_p : K \to K; x \mapsto a_0 + \cdots + a_n x^n$$

die zu p gehörige *Polynomfunktion*.

Man berechnet also f_p indem man ein gegebenes Körperelement x (nicht zu verwechseln mit der Unbestimmten X) für X in das Polynom einsetzt.

Beispiel 8.9

a) Sei $p = 2X^2 - 3X + 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
Dann ist

$$f_p(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 7 = 18 - 9 + 7 = 16.$$

b) Sei $p = X^3 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
Dann ist

$$f_p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(Wir schreiben wieder Standardvertreter anstelle von Restklassen und rechnen modulo 3.)

Beispiel 8.9

a) Sei $p = 2X^2 - 3X + 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
Dann ist

$$f_p(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 7 = 18 - 9 + 7 = 16.$$

b) Sei $p = X^3 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
Dann ist

$$f_p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(Wir schreiben wieder Standardvertreter anstelle von Restklassen und rechnen modulo 3.)

Beispiel 8.9

a) Sei $p = 2X^2 - 3X + 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
Dann ist

$$f_p(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 7 = 18 - 9 + 7 = 16.$$

b) Sei $p = X^3 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
Dann ist

$$f_p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(Wir schreiben wieder Standardvertreter anstelle von Restklassen und rechnen modulo 3.)

Beispiel 8.9

a) Sei $p = 2X^2 - 3X + 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
Dann ist

$$f_p(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 7 = 18 - 9 + 7 = 16.$$

b) Sei $p = X^3 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
Dann ist

$$f_p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(Wir schreiben wieder Standardvertreter anstelle von Restklassen und rechnen modulo 3.)

Beispiel 8.9

a) Sei $p = 2X^2 - 3X + 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
Dann ist

$$f_p(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 7 = 18 - 9 + 7 = 16.$$

b) Sei $p = X^3 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
Dann ist

$$f_p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(Wir schreiben wieder Standardvertreter anstelle von Restklassen und rechnen modulo 3.)

Der Grund, weshalb wir zwischen Polynomen und den zugerörigen Polynomfunktionen unterscheiden, ist, dass es über einem endlichen Körper K zwar unendlich viele Polynome gibt, aber nur endlich viele Polynomfunktionen.

Es gibt also verschiedene Polynome p und q über K, deren Polynomfunktionen übereinstimmen.

Der Grund, weshalb wir zwischen Polynomen und den zugerörigen Polynomfunktionen unterscheiden, ist, dass es über einem endlichen Körper K zwar unendlich viele Polynome gibt, aber nur endlich viele Polynomfunktionen.
Es gibt also verschiedene Polynome p und q über K, deren Polynomfunktionen übereinstimmen.

Beispiel 8.10

Sei $p = X^4 + X + 2$ und $q = X^3 + X^2 + 2$, wobei wir p und q als Polynome über $\mathbb{Z}_3$ auffassen.

Dann ist $p \neq q$, und zwar schon deshalb, weil p und q unterschiedlichen Grad haben. Es gilt aber

$$f_p(0) = 2 = f_q(0), \quad f_p(1) = 1 + 1 + 2 = 1 = f_q(1)$$
$$\text{und } f_p(2) = 1 + 2 + 2 = 2 = 2 + 1 + 2 = f_q(2).$$

Damit sind die Polynomfunktionen f_p und f_q gleich.

Beispiel 8.10

Sei $p = X^4 + X + 2$ und $q = X^3 + X^2 + 2$, wobei wir p und q als Polynome über $\mathbb{Z}_3$ auffassen.
Dann ist $p \neq q$, und zwar schon deshalb, weil p und q unterschiedlichen Grad haben. Es gilt aber

$$f_p(0) = 2 = f_q(0), \quad f_p(1) = 1 + 1 + 2 = 1 = f_q(1)$$
$$\text{und } f_p(2) = 1 + 2 + 2 = 2 = 2 + 1 + 2 = f_q(2).$$

Damit sind die Polynomfunktionen f_p und f_q gleich.

Beispiel 8.10

Sei $p = X^4 + X + 2$ und $q = X^3 + X^2 + 2$, wobei wir p und q als Polynome über $\mathbb{Z}_3$ auffassen.
Dann ist $p \neq q$, und zwar schon deshalb, weil p und q unterschiedlichen Grad haben. Es gilt aber

$$f_p(0) = 2 = f_q(0), \quad f_p(1) = 1 + 1 + 2 = 1 = f_q(1)$$
$$\text{und } f_p(2) = 1 + 2 + 2 = 2 = 2 + 1 + 2 = f_q(2).$$

Damit sind die Polynomfunktionen f_p und f_q gleich.

Ist $p \in K[X]$ und $x \in K$, so schreibt man in der Praxis anstelle von $f_p(x)$ eher $p(x)$.

Für ein Körperelement x steht $p(x)$ also für das Körperelement, das man erhält, wenn man für die Unbestimmte X das Körperelement x in das Polynom einsetzt.

Definition 8.11

Sei K ein Körper und $p \in K[X]$.

Dann heißt $a \in K$ eine *Nullstelle* von p, falls $p(a) = 0$ ist.

Ist $p \in K[X]$ und $x \in K$, so schreibt man in der Praxis anstelle von $f_p(x)$ eher $p(x)$.
Für ein Körperelement x steht $p(x)$ also für das Körperelement, das man erhält, wenn man für die Unbestimmte X das Körperelement x in das Polynom einsetzt.

Definition 8.11
Sei K ein Körper und $p \in K[X]$.
Dann heißt $a \in K$ eine *Nullstelle* von p, falls $p(a) = 0$ ist.

Ist $p \in K[X]$ und $x \in K$, so schreibt man in der Praxis anstelle von $f_p(x)$ eher $p(x)$.
Für ein Körperelement x steht $p(x)$ also für das Körperelement, das man erhält, wenn man für die Unbestimmte X das Körperelement x in das Polynom einsetzt.

Definition 8.11

Sei K ein Körper und $p \in K[X]$.
Dann heißt $a \in K$ eine *Nullstelle* von p, falls $p(a) = 0$ ist.

Ist $p \in K[X]$ und $x \in K$, so schreibt man in der Praxis anstelle von $f_p(x)$ eher $p(x)$.
Für ein Körperelement x steht $p(x)$ also für das Körperelement, das man erhält, wenn man für die Unbestimmte X das Körperelement x in das Polynom einsetzt.

Definition 8.11

Sei K ein Körper und $p \in K[X]$.
Dann heißt $a \in K$ eine *Nullstelle* von p, falls $p(a) = 0$ ist.

Satz 8.12

Ein Körperelement $a \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von $p \in K[X]$, wenn $X - a$ ein Teiler von p ist.

Korollar 8.13

Ein Polynom $p \in K[X]$ vom Grad $n > 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Satz 8.12

Ein Körperelement $a \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von $p \in K[X]$, wenn $X - a$ ein Teiler von p ist.

Korollar 8.13

Ein Polynom $p \in K[X]$ vom Grad $n > 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Der Beweis dieses Korollars liefert ein rekursives Verfahren, alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, wenn man in der Lage ist, einzelne Nullstellen zu bestimmen:

Sei $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$.
Bestimme eine Nullstelle a_1 von p und teile p durch $(X - a_1)$.
Wiederhole das Verfahren mit $p/(X - a_1)$.
Iteriere das Verfahren solange, wie der Grad des Polynom > 0 ist.

Der Beweis dieses Korollars liefert ein rekursives Verfahren, alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, wenn man in der Lage ist, einzelne Nullstellen zu bestimmen:

Sei $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$.
Bestimme eine Nullstelle a_1 von p und teile p durch $(X - a_1)$.
Wiederhole das Verfahren mit $p/(X - a_1)$.
Iteriere das Verfahren solange, wie der Grad des Polynom > 0 ist.

Der Beweis dieses Korollars liefert ein rekursives Verfahren, alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, wenn man in der Lage ist, einzelne Nullstellen zu bestimmen:

Sei $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$.
Bestimme eine Nullstelle a_1 von p und teile p durch $(X - a_1)$.
Wiederhole das Verfahren mit $p/(X - a_1)$.
Iteriere das Verfahren solange, wie der Grad des Polynom > 0 ist.

Der Beweis dieses Korollars liefert ein rekursives Verfahren, alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, wenn man in der Lage ist, einzelne Nullstellen zu bestimmen:

Sei $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$.
Bestimme eine Nullstelle a_1 von p und teile p durch $(X - a_1)$.
Wiederhole das Verfahren mit $p/(X - a_1)$.
Iteriere das Verfahren solange, wie der Grad des Polynom > 0 ist.

Der Beweis dieses Korollars liefert ein rekursives Verfahren, alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, wenn man in der Lage ist, einzelne Nullstellen zu bestimmen:

Sei $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$.
Bestimme eine Nullstelle a_1 von p und teile p durch $(X - a_1)$.
Wiederhole das Verfahren mit $p/(X - a_1)$.
Iteriere das Verfahren solange, wie der Grad des Polynom > 0 ist.

Um Nullstellen von Polynomen zweiten Grades über $\mathbb{R}$ zu bestimmen, gibt es die bekannte p-q-Formel:

Das Polynom $X^2 + pX + q$ hat die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

falls die *Diskriminante* $\frac{p^2}{4} - q$ nicht negativ ist.
Ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so hat $X^2 + pX + q$ keine reellen Nullstellen.

Um Nullstellen von Polynomen zweiten Grades über $\mathbb{R}$ zu bestimmen, gibt es die bekannte p-q-Formel:

Das Polynom $X^2 + pX + q$ hat die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

falls die *Diskriminante* $\frac{p^2}{4} - q$ nicht negativ ist.
Ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so hat $X^2 + pX + q$ keine reellen Nullstellen.

Um Nullstellen von Polynomen zweiten Grades über $\mathbb{R}$ zu bestimmen, gibt es die bekannte *p*-*q*-Formel:

Das Polynom $X^2 + pX + q$ hat die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

falls die *Diskriminante* $\frac{p^2}{4} - q$ nicht negativ ist.
Ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so hat $X^2 + pX + q$ keine reellen Nullstellen.

Um Nullstellen von Polynomen zweiten Grades über $\mathbb{R}$ zu bestimmen, gibt es die bekannte p-q-Formel:

Das Polynom $X^2 + pX + q$ hat die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

falls die *Diskriminante* $\frac{p^2}{4} - q$ nicht negativ ist.

Ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so hat $X^2 + pX + q$ keine reellen Nullstellen.

Um Nullstellen von Polynomen zweiten Grades über $\mathbb{R}$ zu bestimmen, gibt es die bekannte *p*-*q*-Formel:

Das Polynom $X^2 + pX + q$ hat die Nullstellen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

falls die *Diskriminante* $\frac{p^2}{4} - q$ nicht negativ ist.
Ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, so hat $X^2 + pX + q$ keine reellen Nullstellen.

Herleitung der p-q-Formel:

Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form

$$X^2 + pX + q = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach X auflösen.
Eine Gleichung der Form

$$(X + a)^2 = b$$

lässt sich allerdings einfach nach X auflösen:

Herleitung der p-q-Formel:
Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form

$$X^2 + pX + q = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach X auflösen.
Eine Gleichung der Form

$$(X + a)^2 = b$$

lässt sich allerdings einfach nach X auflösen:

Herleitung der *p*-*q*-Formel:
Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form

$$X^2 + pX + q = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach X auflösen.
Eine Gleichung der Form

$$(X + a)^2 = b$$

lässt sich allerdings einfach nach X auflösen:

Herleitung der p-q-Formel:
Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form

$$X^2 + pX + q = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach X auflösen.
Eine Gleichung der Form

$$(X + a)^2 = b$$

lässt sich allerdings einfach nach X auflösen:

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned} X^2 + pX + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned} X^2 + pX + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned}
X^2 + pX + q &= 0 \\
X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\
X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}$$

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned} X^2 + pX + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned}
X^2 + pX + q &= 0 \\
X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\
X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}$$

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned} X^2 + pX + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Aus $(X+a)^2 = b$ folgt $b \geq 0$ und $X + a = \pm\sqrt{b}$.
$(X+a)^2 = b$ ist also genau dann lösbar, wenn $b \geq 0$ gilt, und die Lösungen sind die Zahlen $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b}$.

Die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ können wir aber auf die Form $(X+a)^2 = b$ bringen:

$$\begin{aligned}
X^2 + pX + q &= 0 \\
X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\
X^2 + 2\frac{p}{2}X + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\left(X + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}$$

Setzt man also $a := \frac{p}{2}$ und $b = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q$, so hat man die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ in die Form $(X + a)^2 = b$ überführt.

Damit ist $X^2 + pX + q = 0$ genau dann lösbar, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ gilt.

In diesem Falle lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Das erklärt die Gültigkeit der p-q-Formel.

Setzt man also $a := \frac{p}{2}$ und $b = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q$, so hat man die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ in die Form $(X + a)^2 = b$ überführt.

Damit ist $X^2 + pX + q = 0$ genau dann lösbar, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ gilt.
In diesem Falle lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Das erklärt die Gültigkeit der p-q-Formel.

Setzt man also $a := \frac{p}{2}$ und $b = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q$, so hat man die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ in die Form $(X + a)^2 = b$ überführt.

Damit ist $X^2 + pX + q = 0$ genau dann lösbar, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ gilt.
In diesem Falle lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Das erklärt die Gültigkeit der p-q-Formel.

Setzt man also $a := \frac{p}{2}$ und $b = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q$, so hat man die Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ in die Form $(X + a)^2 = b$ überführt.

Damit ist $X^2 + pX + q = 0$ genau dann lösbar, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ gilt.
In diesem Falle lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{b} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Das erklärt die Gültigkeit der p-q-Formel.

Indem man ein von 0 verschiedenes Polynom durch seinen Leitkoeffizienten teilt, kann man es normieren, ohne die Nullstellen zu verändern.

Damit löst die p-q-Formel das Problem des Findens von Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 über $\mathbb{R}$.

Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 lassen sich direkt durch Auflösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen finden.

Für Polynome 3. und 4. Grades über $\mathbb{R}$ gibt es auch Formeln, die aber zu umfangreich sind, um sie hier zu diskutieren.

Man kann beweisen, dass es zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen 5. Grades über $\mathbb{R}$ keine allgemeinen Formeln mehr gibt. Allerdings kann man mit Hilfe numerischer Verfahren immer noch Näherungslösungen für Gleichungen der Form $p(x) = 0$ finden.

Indem man ein von 0 verschiedenes Polynom durch seinen Leitkoeffizienten teilt, kann man es normieren, ohne die Nullstellen zu verändern.

Damit löst die p-q-Formel das Problem des Findens von Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 über $\mathbb{R}$.

Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 lassen sich direkt durch Auflösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen finden.

Für Polynome 3. und 4. Grades über $\mathbb{R}$ gibt es auch Formeln, die aber zu umfangreich sind, um sie hier zu diskutieren.

Man kann beweisen, dass es zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen 5. Grades über $\mathbb{R}$ keine allgemeinen Formeln mehr gibt. Allerdings kann man mit Hilfe numerischer Verfahren immer noch Näherungslösungen für Gleichungen der Form $p(x) = 0$ finden.

Indem man ein von 0 verschiedenes Polynom durch seinen Leitkoeffizienten teilt, kann man es normieren, ohne die Nullstellen zu verändern.
Damit löst die p-q-Formel das Problem des Findens von Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 über $\mathbb{R}$.
Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 lassen sich direkt durch Auflösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen finden.
Für Polynome 3. und 4. Grades über $\mathbb{R}$ gibt es auch Formeln, die aber zu umfangreich sind, um sie hier zu diskutieren.
Man kann beweisen, dass es zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen 5. Grades über $\mathbb{R}$ keine allgemeinen Formeln mehr gibt.
Allerdings kann man mit Hilfe numerischer Verfahren immer noch Näherungslösungen für Gleichungen der Form $p(x) = 0$ finden.

Indem man ein von 0 verschiedenes Polynom durch seinen Leitkoeffizienten teilt, kann man es normieren, ohne die Nullstellen zu verändern.
Damit löst die p-q-Formel das Problem des Findens von Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 über $\mathbb{R}$.
Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 lassen sich direkt durch Auflösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen finden.
Für Polynome 3. und 4. Grades über $\mathbb{R}$ gibt es auch Formeln, die aber zu umfangreich sind, um sie hier zu diskutieren.
Man kann beweisen, dass es zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen 5. Grades über $\mathbb{R}$ keine allgemeinen Formeln mehr gibt.
Allerdings kann man mit Hilfe numerischer Verfahren immer noch Näherungslösungen für Gleichungen der Form $p(x) = 0$ finden.

Indem man ein von 0 verschiedenes Polynom durch seinen Leitkoeffizienten teilt, kann man es normieren, ohne die Nullstellen zu verändern.
Damit löst die p-q-Formel das Problem des Findens von Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 über $\mathbb{R}$.
Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 lassen sich direkt durch Auflösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen finden.
Für Polynome 3. und 4. Grades über $\mathbb{R}$ gibt es auch Formeln, die aber zu umfangreich sind, um sie hier zu diskutieren.
Man kann beweisen, dass es zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen 5. Grades über $\mathbb{R}$ keine allgemeinen Formeln mehr gibt.
Allerdings kann man mit Hilfe numerischer Verfahren immer noch Näherungslösungen für Gleichungen der Form $p(x) = 0$ finden.

Indem man ein von 0 verschiedenes Polynom durch seinen Leitkoeffizienten teilt, kann man es normieren, ohne die Nullstellen zu verändern.
Damit löst die p-q-Formel das Problem des Findens von Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 über $\mathbb{R}$.
Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 lassen sich direkt durch Auflösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen finden.
Für Polynome 3. und 4. Grades über $\mathbb{R}$ gibt es auch Formeln, die aber zu umfangreich sind, um sie hier zu diskutieren.
Man kann beweisen, dass es zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen 5. Grades über $\mathbb{R}$ keine allgemeinen Formeln mehr gibt.
Allerdings kann man mit Hilfe numerischer Verfahren immer noch Näherungslösungen für Gleichungen der Form $p(x) = 0$ finden.

Hilfreich ist allerdings folgender Satz:

Satz 8.14

Sei $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ein normiertes Polynom vom Grad $n > 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.
Dann ist jede Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$ von p eine ganze Zahl, die a_0 teilt.

Der Beweis dieses Satzes übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung.
Der Satz zeigt aber, dass man die rationalen Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten einfach durch Ausprobieren der Teiler des konstanten Summanden des Polynoms finden kann.

Hilfreich ist allerdings folgender Satz:

Satz 8.14

Sei $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ *ein normiertes Polynom vom Grad* $n > 0$ *mit ganzzahligen Koeffizienten.*
Dann ist jede Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$ *von* p *eine ganze Zahl, die* a_0 *teilt.*

Der Beweis dieses Satzes übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Der Satz zeigt aber, dass man die rationalen Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten einfach durch Ausprobieren der Teiler des konstanten Summanden des Polynoms finden kann.

Hilfreich ist allerdings folgender Satz:

Satz 8.14

Sei $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ein normiertes Polynom vom Grad $n > 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.
Dann ist jede Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$ von p eine ganze Zahl, die a_0 teilt.

Der Beweis dieses Satzes übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Der Satz zeigt aber, dass man die rationalen Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten einfach durch Ausprobieren der Teiler des konstanten Summanden des Polynoms finden kann.

Hilfreich ist allerdings folgender Satz:

Satz 8.14

Sei $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ *ein normiertes Polynom vom Grad* $n > 0$ *mit ganzzahligen Koeffizienten.*
Dann ist jede Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$ *von* p *eine ganze Zahl, die* a_0 *teilt.*

Der Beweis dieses Satzes übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung.

Der Satz zeigt aber, dass man die rationalen Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten einfach durch Ausprobieren der Teiler des konstanten Summanden des Polynoms finden kann.

Hilfreich ist allerdings folgender Satz:

Satz 8.14

Sei $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ein normiertes Polynom vom Grad $n > 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.
Dann ist jede Nullstelle $a \in \mathbb{Q}$ von p eine ganze Zahl, die a_0 teilt.

Der Beweis dieses Satzes übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Der Satz zeigt aber, dass man die rationalen Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten einfach durch Ausprobieren der Teiler des konstanten Summanden des Polynoms finden kann.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.

Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.

Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.

Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.

Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.

Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.
Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.
Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.
Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.
Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.
Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.
Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.
Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.
Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.
Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.
Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.
Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.
Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.
Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.
Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.
Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.
Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.
Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.
Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.
Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.
Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.
Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.
Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.
Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.
Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.
Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.
Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.
Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.
Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.
Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.
Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Beispiel 8.15

Sei $p = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.
Wir wollen die rationalen Nullstellen von p finden.
Nach Satz 8.14 sind die rationalen Nullstellen in Wirklichkeit ganze Zahlen, die -6 teilen.
Die Kandidaten sind also $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$.
Als erstes probieren wir 1 aus, weil in diesem Fall die Rechnung am einfachsten ist.
Es gilt $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.
Damit haben wir die erste Nullstelle $a_1 = 1$ von p gefunden.

Nun teilen wir p durch $X - 1$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
X^3 & -\,6X^2 & +\,11X & -\,6 & = (X-1)\left(X^2 - 5X + 6\right) \\
-\,X^3 & +\,X^2 & & & \\
\hline
 & -\,5X^2 & +\,11X & & \\
 & 5X^2 & -\,5X & & \\
\cline{2-3}
 & & 6X & -\,6 & \\
 & & -\,6X & +\,6 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Die weiteren Nullstellen von p sind Nullstellen des Quotienten $q = X^2 - 5X + 6$.

Nun teilen wir p durch $X - 1$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
X^3 & -\,6X^2 & +\,11X & -\,6 & = (X-1)\left(X^2 - 5X + 6\right) \\
-\,X^3 & +\,X^2 & & & \\
\hline
 & -\,5X^2 & +\,11X & & \\
 & 5X^2 & -\,5X & & \\
\hline
 & & 6X & -\,6 & \\
 & & -\,6X & +\,6 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Die weiteren Nullstellen von p sind Nullstellen des Quotienten $q = X^2 - 5X + 6$.

Nun teilen wir p durch $X - 1$.

$$\begin{array}{rrrrl}
X^3 & -6X^2 & +11X & -6 & = (X-1)\left(X^2 - 5X + 6\right) \\
-X^3 & +X^2 & & & \\
\hline
& -5X^2 & +11X & & \\
& 5X^2 & -5X & & \\
\hline
& & 6X & -6 & \\
& & -6X & +6 & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

Die weiteren Nullstellen von p sind Nullstellen des Quotienten $q = X^2 - 5X + 6$.

Da q ein Polynom zweiten Grades ist, können wir die p-q-Formel benutzen, um die Nullstellen von $X^2 - 5X + 6$ zu finden.
Die Diskriminante ist in diesem Falle

$$D = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es gilt

$$a_2 = -\frac{-5}{2} + \sqrt{D} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

und

$$a_3 = -\frac{-5}{2} - \sqrt{D} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Damit haben wir alle Nullstellen von p gefunden.

Da q ein Polynom zweiten Grades ist, können wir die p-q-Formel benutzen, um die Nullstellen von $X^2 - 5X + 6$ zu finden.
Die Diskriminante ist in diesem Falle

$$D = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es gilt

$$a_2 = -\frac{-5}{2} + \sqrt{D} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

und

$$a_3 = -\frac{-5}{2} - \sqrt{D} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Damit haben wir alle Nullstellen von p gefunden.

Da q ein Polynom zweiten Grades ist, können wir die p-q-Formel benutzen, um die Nullstellen von $X^2 - 5X + 6$ zu finden.
Die Diskriminante ist in diesem Falle

$$D = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es gilt

$$a_2 = -\frac{-5}{2} + \sqrt{D} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

und

$$a_3 = -\frac{-5}{2} - \sqrt{D} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Damit haben wir alle Nullstellen von p gefunden.

Da q ein Polynom zweiten Grades ist, können wir die p-q-Formel benutzen, um die Nullstellen von $X^2 - 5X + 6$ zu finden.
Die Diskriminante ist in diesem Falle

$$D = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es gilt

$$a_2 = -\frac{-5}{2} + \sqrt{D} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

und

$$a_3 = -\frac{-5}{2} - \sqrt{D} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Damit haben wir alle Nullstellen von p gefunden.

Da q ein Polynom zweiten Grades ist, können wir die p-q-Formel benutzen, um die Nullstellen von $X^2 - 5X + 6$ zu finden.
Die Diskriminante ist in diesem Falle

$$D = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es gilt

$$a_2 = -\frac{-5}{2} + \sqrt{D} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

und

$$a_3 = -\frac{-5}{2} - \sqrt{D} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Damit haben wir alle Nullstellen von p gefunden.

Wir führen eine weitere Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{rl}
X^2 - 5X + 6 & = (X-2)\,(X-3) \\
\underline{-X^2 + 2X\phantom{{}+6}} & \\
-3X + 6 & \\
\underline{3X - 6} & \\
0 &
\end{array}$$

Damit gilt

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Die Polynome vom Grad 1, die dabei auftreten, nennt man in diesem Zusammenhang *Linearfaktoren*, da ihre Graphen Geraden ("Linien") sind.
Man sagt, dass p über $\mathbb{R}$ in *Linearfaktoren zerfällt*.

Wir führen eine weitere Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r}
X^2 - 5X + 6 = \left(X-2\right)\left(X-3\right) \\
-X^2 + 2X \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
-3X + 6 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
3X - 6 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

Damit gilt

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Die Polynome vom Grad 1, die dabei auftreten, nennt man in diesem Zusammenhang *Linearfaktoren*, da ihre Graphen Geraden ("Linien") sind.
Man sagt, dass p über $\mathbb{R}$ in *Linearfaktoren zerfällt*.

Wir führen eine weitere Polynomdivision durch.

$$
\begin{array}{rl}
X^2 - 5X + 6 & = (X-2)\,(X-3) \\
-X^2 + 2X & \\
\hline
-3X + 6 & \\
3X - 6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Damit gilt

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Die Polynome vom Grad 1, die dabei auftreten, nennt man in diesem Zusammenhang *Linearfaktoren*, da ihre Graphen Geraden ("Linien") sind.
Man sagt, dass p über $\mathbb{R}$ in *Linearfaktoren zerfällt*.

Wir führen eine weitere Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{rl} X^2 - 5X + 6 & = (X-2)\,(X-3) \\ -X^2 + 2X & \\ \hline -3X + 6 & \\ 3X - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Damit gilt

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Die Polynome vom Grad 1, die dabei auftreten, nennt man in diesem Zusammenhang *Linearfaktoren*, da ihre Graphen Geraden ("Linien") sind.

Man sagt, dass p über $\mathbb{R}$ in *Linearfaktoren zerfällt*.

Wir führen eine weitere Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{rl} X^2 - 5X + 6 & = (X-2)\,(X-3) \\ -X^2 + 2X & \\ \hline -3X + 6 & \\ 3X - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Damit gilt

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Die Polynome vom Grad 1, die dabei auftreten, nennt man in diesem Zusammenhang *Linearfaktoren*, da ihre Graphen Geraden ("Linien") sind.
Man sagt, dass p über $\mathbb{R}$ in *Linearfaktoren zerfällt*.

Nicht jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
Ein einfaches Beispiel ist $p = X^2 + 1$.
Für jede reelle Zahl a ist $p(a) \geq 1$.
Damit hat p keine reellen Nullstellen und lässt sich damit auch nicht als Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, also einen Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst, kennenlernen, über dem jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Dies ist der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*.

Nicht jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
Ein einfaches Beispiel ist $p = X^2 + 1$.
Für jede reelle Zahl a ist $p(a) \geq 1$.
Damit hat p keine reellen Nullstellen und lässt sich damit auch nicht als Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, also einen Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst, kennenlernen, über dem jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Dies ist der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*.

Nicht jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
Ein einfaches Beispiel ist $p = X^2 + 1$.
Für jede reelle Zahl a ist $p(a) \geq 1$.
Damit hat p keine reellen Nullstellen und lässt sich damit auch nicht als Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, also einen Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst, kennenlernen, über dem jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Dies ist der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*.

Nicht jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
Ein einfaches Beispiel ist $p = X^2 + 1$.
Für jede reelle Zahl a ist $p(a) \geq 1$.
Damit hat p keine reellen Nullstellen und lässt sich damit auch nicht als Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, also einen Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst, kennenlernen, über dem jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Dies ist der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*.

Nicht jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
Ein einfaches Beispiel ist $p = X^2 + 1$.
Für jede reelle Zahl a ist $p(a) \geq 1$.
Damit hat p keine reellen Nullstellen und lässt sich damit auch nicht als Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, also einen Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst, kennenlernen, über dem jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Dies ist der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*.

Nicht jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
Ein einfaches Beispiel ist $p = X^2 + 1$.
Für jede reelle Zahl a ist $p(a) \geq 1$.
Damit hat p keine reellen Nullstellen und lässt sich damit auch nicht als Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben.

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, also einen Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst, kennenlernen, über dem jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Dies ist der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*.