Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2017/18

19. Oktober 2017

Zu der Vorlesung gibt es ein Skript, welches auf meiner Homepage veröffentlicht wird:

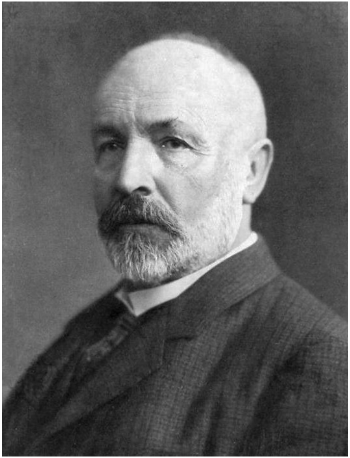
http://www.math.uni-hamburg.de/home/geschke/lehre.html

Es wird zwei Bonusklausuren geben, die freitags während der normalen Vorlesungszeit stattfinden. Die genauen Termine werden noch bekanntgegeben.
Die erste reguläre Klausur findet am 6.2.2018 statt. Die zweite reguläre Klausur findet am 21.3.2018 statt.

Zulassungskriterium zu den regulären Klausuren ist die sinnvolle Bearbeitung von mindestens 50% der Hausaufgaben. Die Hausaufgaben werden in den Übungsgruppen ausgegeben.

Aussagen, Mengen und Boolesche Algebra

Mengen



Georg Cantor (1845–1918)

Definition 1.1

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte, die die *Elemente* der Menge genannt werden.

Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an. Auch können Elemente in einer Menge nicht mehrfach vorkommen. Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt. Daher schreiben wir $A = B$ für zwei Mengen A und B, wenn A und B dieselben Elemente haben.

Definition 1.2

Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir $x \in M$. $x \notin M$ bedeutet, dass x kein Element von M ist. Sind A und B Mengen, so schreiben wir $A \subseteq B$, wenn A eine *Teilmenge* von B ist, also wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Die (eindeutig bestimmte) Menge, die keine Elemente hat, heißt die *leere Menge*. Sie wird als $\{\}$ oder $\emptyset$ notiert.

$\{1, 2, 3\}$ ist die Menge mit den Elementen 1, 2 und 3.
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.
$\mathbb{N}$ ist die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.
$\{n : \; n$ ist eine durch 2 teilbare natürliche Zahl$\}$ ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen.

Elementare Logik

Definition 1.3

Eine *Aussage* ist ein Satz, von dem man im Prinzip eindeutig feststellen kann, ob er wahr oder falsch ist.
Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, ist der *Wahrheitswert* der Aussage. Der Wahrheitswert "wahr" wird dabei oft mit "w" oder "1" abgekürzt, der Wahrheitswert "falsch" mit "f" oder "0".

Definition 1.4

Ist a eine Aussage, so ist die *Negation* von a die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn a falsch ist. Die Negation von a wird $\neg a$ geschrieben und "nicht a" gelesen.
Sind a und b Aussagen, so ist die *Konjunktion* von a und b die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl a als auch b wahr ist. Die Konjunktion von a und b wird $a \wedge b$ geschrieben und "a und b" gelesen.
Die *Disjunktion* von a und b ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen a und b wahr ist. Die Disjunktion von a und b wird $a \vee b$ geschrieben und "a oder b" gelesen.

Den Wahrheitswert einer durch logische Verknüpfungen aus anderen Aussagen gebildeten Aussage in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Ausgangsaussagen kann man in Form einer *Wahrheitstafel* beschreiben:

a	$\neg a$
0	1
1	0

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Definition 1.5

Weitere wichtige logische Verknüpfungen sind die *Implikation* $\rightarrow$, die *Äquivalenz* $\leftrightarrow$ und das exklusive Oder xor. Wir definieren diese Verknüpfungen mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

a	b	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	xor
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

Zwei Aussagen a und b heißen *äquivalent*, wenn $a \leftrightarrow b$ wahr ist. Ist $a \rightarrow b$ wahr, so sagen wir, *a impliziert b* oder *b folgt aus a*.

Die folgenden beiden Sätze beweist man leicht mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens.

Satz 1.6

Sind a, b und c Aussagen, so ist $a \wedge (b \vee c)$ äquivalent zu $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Satz 1.7 (Kontraposition)

Seien a und b Aussagen. Die Aussage $a \to b$ ist äquivalent zu $\neg b \to \neg a$.

Beispiel 1.8

Der Satz "wenn es neblig ist, ist die Sicht schlecht" ist äquivalent zu "wenn die Sicht nicht schlecht ist, dann ist es nicht neblig".

Definition 1.9

Eine *Aussageform* ist eine Aussage, in der eine Konstante durch eine Variable ersetzt wurde. So erhält man aus einer Aussage a eine Aussageform $a(x)$.

Ist $a(x)$ die Aussageform "$x = 2$" und $b(x)$ die Aussageform "$x^2 = 4$", so verstehen wir, was "$a(x) \Rightarrow b(x)$" bedeutet:

$$\text{Wenn } x = 2 \text{ ist, so ist } x^2 = 4.$$

Setzen wir für x konkrete natürliche Zahlen ein, so erhalten wir immer eine wahre Aussage. Mit anderen Worten, die Aussage

$$\text{Für alle natürlichen Zahlen } x \text{ gilt: } a(x) \Rightarrow b(x)$$

ist wahr.

Definition 1.10

Sei $a(x)$ eine Aussageform und M eine Menge. Dann ist

$$(\exists x \in M)a(x)$$

die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn es mindestens ein Element x der Menge M gibt, so dass $a(x)$ gilt. $(\exists x \in M)a(x)$ wird "es gibt ein x in M mit $a(x)$" gelesen. Das Zeichen $\exists$ ist der *Existenzquantor*.

$$(\forall x \in M)a(x)$$

ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $a(x)$ für alle Elemente x der Menge M gilt. $(\forall x \in M)a(x)$ wird "für alle x in M gilt $a(x)$" gelesen. Das Zeichen $\forall$ ist der *Allquantor*.

Aussagen, die mit einem Allquantor beginnen, sind *Allaussagen*. Aussagen, die mit einem Existenzquantor beginnen, sind *Existenzaussagen*.

Die Negation $\neg(\forall x \in M)a(x)$ der Allaussage $(\forall x \in M)a(x)$ ist äquivalent zu der Existenzaussage $(\exists x \in M)\neg a(x)$.

Analog ist die Negation $\neg(\exists x \in M)a(x)$ der Existenzaussage $(\exists x \in M)a(x)$ äquivalent zu der Allaussage $(\forall x \in M)\neg a(x)$.

Definition 1.11

Seien A und B Mengen. Dann ist die *Vereinigung* von A und B definiert als

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Der *Schnitt* oder *Durchschnitt* von A und B ist die Menge

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Die *mengentheoretische Differenz* von A und B ist die Menge

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

Definition 1.12

Für eine Menge M sei

$$\mathcal{P}(M) := \{x : x \subseteq M\}$$

die *Potenzmenge* von M.

Wir fixieren M und betrachten nur Teilmengen von M. Für $A \in \mathcal{P}(M)$ sei

$$\overline{A} := \{x \in M : x \notin A\}$$

das *Komplement* von A in M.

Mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens lassen sich Sätze über Mengenoperationen beweisen.

Satz 1.13

Es gilt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*.*

Dieser Satz ist eines der *Distributivgesetze* für die Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$, auf die wir noch genauer zu sprechen kommen.

Definition 1.15

Sind A und B Mengen, so bezeichnet man mit $A \times B$ die Menge $\{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$ aller geordneten Paare (a, b), deren erste Komponente a ein Element von A ist und deren zweite Komponente b ein Element von B sind.
$A \times B$ heißt das *kartesische Produkt* der Mengen A und B. Mit A^2 bezeichnet man die Menge $A \times A$.
A^3 ist die Menge $\{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in A\}$ aller Tripel von Elementen von A.
Analog ist für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ A^n die Menge $\{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in A\}$ aller *n-Tupel* von Elementen von A.

Abbildungen

Definition 1.16

Eine *Abbildung* von einer Menge A in eine Menge B ist eine Zuordnung, die jedem Element von A ein Element von B zuordnet.

Abbildungen werden oft auch *Funktionen* genannt.

Ist f eine Abbildung von A nach B, so schreiben wir $f : A \to B$. Dabei wird A der *Definitionsbereich* von f genannt und B der *Wertevorrat*.

Für jedes $a \in A$ bezeichnen wir mit $f(a)$ das Element von B, das die Funktion f dem Element a zuordnet.

Falls f einem Element $a \in A$ also $b \in B$ zuordnet, so schreiben wir $f(a) = b$ und sagen "f bildet a auf b ab". Das Element b heißt der *Wert* oder der *Funktionswert* von f an der Stelle a.

Man kann anstelle von $f(a) = b$ auch $a \mapsto b$ schreiben, wenn klar ist, welche Funktion f gemeint ist.

Das *Bild* von f ist die Menge $\{f(x) : x \in A\}$.

Definition 1.18

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

1. *injektiv*, falls für alle $x, y \in A$ gilt: Ist $x \neq y$, so ist $f(x) \neq f(y)$.
2. *surjektiv*, falls es für alle $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ gibt, so dass $f(a) = b$ gilt.
3. *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Definition 1.19

Für eine natürliche Zahl n versteht man unter einer *n-stelligen Verknüpfung* oder einer *n-stelligen Operation* auf einer Menge M eine Abbildung $f : M^n \to M$.

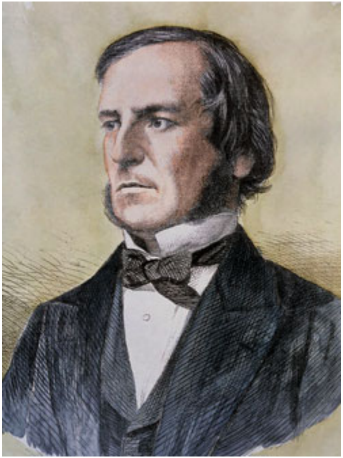
Der wichtigste Spezialfall ist der einer *binären* Verknüpfung $f : M^2 \to M$. Beispiele binärer Verknüpfungen sind die Addition

$$+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; (m, n) \mapsto m + n$$

und die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; (m, n) \mapsto m \cdot n.$$

Boolesche Algebra



George Boole (1815–1864)

Augustus De Morgan (1806–1871)

Definition 1.20

Gegeben sei eine Menge B, die mindestens die zwei verschiedene Elemente 1 und 0 enthält, zusammen mit der einstelligen Verknüpfung $\neg : B \to B$ und den zwei zweistelligen Verknüpfungen $\sqcap, \sqcup : B^2 \to B$.

$(B, \sqcap, \sqcup, \neg, 0, 1)$ heißt eine *Boolesche Algebra*, wenn für alle $a, b, c \in B$ die folgenden Gleichungen gelten:

(A1) Assoziativgesetze:

- $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

(A2) Kommutativgesetze:

- $a \sqcap b = b \sqcap a$
- $a \sqcup b = b \sqcup a$

(A3) Distributivgesetze:

- $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$
- $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

(A4) Beschränkheit:

- $a \sqcap 1 = a$
- $a \sqcup 0 = a$

(A5) Komplementierung:

- $a \sqcap \neg a = 0$
- $a \sqcup \neg a = 1$

Die Aussagen (A1)–(A5) sind die *Axiome* für Boolesche Algebren.

Beispiel 1.21

1. Die *Schaltalgebra* ist die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte mit den Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.
2. Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ mit den Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ und Komplementbildung sowie den Konstanten $1 := M$ und $0 := \emptyset$ eine Boolesche Algebra, die *Potenzmengenalgebra* von M.

Satz 1.22

Für alle $a \in B$ gilt $a \sqcap a = a$ und $a \sqcup a = a$.

Satz 1.23 (Dualitätsprinzip für Boolesche Algebren)

Jede Aussage, die eine Folgerung aus den Axiomen (A1)–(A5) ist, geht in eine gültige Aussage über, wenn man in ihr überall die Zeichen $\sqcap$ und $\sqcup$ sowie die Zeichen 0 und 1 vertauscht.

Satz 1.24

Für alle $a \in B$ gilt $a \sqcap 0 = 0$ und $a \sqcup 1 = 1$.

Satz 1.25 (De Morgansche Regeln)

Für alle $a, b \in B$ gilt $\neg(a \sqcap b) = \neg a \sqcup \neg b$ und $\neg(a \sqcup b) = \neg a \sqcap \neg b$.