Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 9
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 9. Dezember 2019

1. (a) Schreiben Sie die Gleichung

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

mit Hilfe des Summenzeichens.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Gleichung aus (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung. (a) Mit dem Summenzeichen geschrieben lautet die Gleichung $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

(b) Induktionsanfang: Die Behauptung stimmt für $n = 1$, denn $1 = 1^2$ ist wahr.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, die Gleichung gilt für n (Induktionsannahme). Wir zeigen, dass dann die Gleichung auch für $n + 1$ anstelle von n gilt.

Wir beginnen mit der rechten Seite der Gleichung für $n + 1$. Es gilt

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = \sum_{i=1}^{n}(2n-1) + 2n + 1 = \sum_{i=1}^{n+1}(2n-1).$$

Dabei gilt das zweite Gleichungszeichen nach der Induktionsannahme. □

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Relation $3|(n^3 - n)$ zutrifft (3 teilt $n^3 - n$).

Lösung. Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann ist $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0$ und es gilt $3|0$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, $3|(n^3 - n)$. Wir zeigen, dass die Relation auch für $n+1$ anstelle von n gilt.

Es ist

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n.$$

Nach Induktionsannahme ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar. Offenbar ist auch $3n^2 + 3n$ durch 3 teilbar. Es folgt, dass $(n+1)^3 - (n+1)$ ebenfalls durch 3 teilbar ist. □

3. Wahr oder falsch?

(a) $\sum_{k=1}^{\ell} k = \sum_{\ell=1}^{k} \ell$

(b) $\sum_{i=1}^{7} 5 = 35$

(c) $\sum_{j=1}^{4} j = 12$

(d) $\sum_{\ell=1}^{0} \ell = 0$

Lösung. (a) Nein. (b) Ja. (c) Nein. (d) Ja.

B: Hausaufgaben zum 16. Dezember 2019

1. Beweisen Sie, unter Benutzung der Peano-Axiome, dass für alle $a, m \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Aussagen gelten:

   (a) $1 + m = m + 1$

   (b) $a + m = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge m = 0$

   Lösung. (a) Es gilt $1 = \nu(0)$. Nach der Definition von $+$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$

   $$m + 1 = m + \nu(0) = \nu(m + 0) = \nu(m).$$

   Sei nun $A = \{m \in \mathbb{N}_0 : 1 + m = m + 1\}$. Es gilt $1 + 0 = 1 = \nu(0) = 0 + \nu(0) = 0 + 1$. Damit ist $0 \in A$.

   Sei nun $m \in A$. Dann gilt $1 + m = m + 1$. Es ist

   $$1 + \nu(m) = \nu(1 + m) = \nu(m + 1) = \nu((m + 1) + 0) = (m + 1) + 1 = \nu(m) + 1.$$

   Damit ist auch $\nu(m) \in A$. Nach (P3) ist $A = \mathbb{N}_0$. Damit gilt $m + 1 = 1 + m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Sei $a \in \mathbb{N}_0$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Erster Fall: $a = 0$. Wir setzen $B = \{m \in \mathbb{N}_0 : a + m = 0 \to a = 0 \wedge m = 0\}$. Es ist klar, dass $0 \in B$ gilt. Sei nun $m \in B$. Dann ist $a + \nu(m) = \nu(a + m) \neq 0$, da 0 nach (P1) kein Nachfolger ist. Also gilt $\nu(m) \in B$. Es folgt $B = \mathbb{N}_0$.

   Zweiter Fall: $a \neq 0$. Wieder setzen wir $B = \{m \in \mathbb{N}_0 : a + m = 0 \to a = 0 \wedge m = 0\}$. Es gilt $a + 0 = a \neq 0$. Damit ist $0 \in B$. Sei nun $m \in B$. Dann ist $a + \nu(m) = \nu(a + m) \neq 0$. Damit ist $\nu(m) \in B$. Das zeigt $B = \mathbb{N}_0$.

   In beiden Fällen sehen wir, dass die Implikation $a + m = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt.

   Alternative: Der Induktionsbeweis ist hier eigentlich unnötig, da die Induktionsannahme nie benutzt wird.

   Wir können die Aussage auch direkt beweisen. Angenommen für $a, m \in \mathbb{N}_0$ gilt $a + m = 0$. Dann kann m kein Nachfolger sein. Ist nämlich $m = \nu(n)$, so gilt $a + \nu(n) = \nu(a + n) \neq 0$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen nach der Definition von $+$ und das Ungleichheitszeichen nach dem ersten Peano-Axiom (P1).

   Durch vollständige Induktion haben wir bereits gesehen, dass 0 das einzige Element von $\mathbb{N}_0$ ist, das kein Nachfolger ist. Damit folgt aus $a + m = 0$ sofort $m = 0$. Es gilt also $a + 0 = 0$. Nun haben wir allerdings $a + 0 = a$ definiert. Damit ist $a = 0$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

2. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt (geometrische Summenformel):

   $$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

   Lösung. Induktionsanfang: Die Gleichung gilt für $n = 0$. Die linke Seite lautet in diesem Fall nämlich $\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1$, wwährend die rechte Seite $\frac{q^{0+1}-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1$ lautet.

   Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Induktionsannahme: Die Gleichung gilt für dieses n. Wir zeigen, dass sie auch für $n + 1$ anstelle von n gilt.

   Es gilt

   $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} \\ &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.\end{aligned}$$

   Dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen aus der Induktionsannahme. $\square$

3. . Sei $h \in \mathbb{R}$. Es gelte $h \geq -1$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $(1+h)^n \geq 1 + nh$ gilt (Bernoullische Ungleichung).

   Lösung. Induktionsanfang: Die Ungleichung gilt für $n = 0$, denn es ist $(1+h)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot h$.

   Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen, die Ungleichung gilt für n. Wir zeigen die Ungleichung für $n+1$.

   Es ist

   $$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh) \cdot (1+h) = 1 + nh + h + nh^2 \geq 1 + nh + h = 1 + (n+1)h.$$

   Dabei folgt die erste Ungleichung $(1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh) \cdot (1+h)$ aus der Induktionsannahme $(1+h)^n \geq (1+nh)$ zusammen mit der Tatsache, dass $(1+h) \geq 0$ gilt. □

4. Mit $n!$ (gelesen „n Fakultät") bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ der ersten n natürlichen Zahlen. Finden Sie heraus, für welche natürlichen Zahlen die Ungleichung $2^n < n!$ gilt und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

   Lösung. Es gilt $2^1 = 2 \geq 1 = 1!$, $2^2 = 4 \geq 2 = 2!$, $2^3 = 8 \geq 6 = 3!$ und $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Eine naheliegende Vermutung ist, dass $2^n < n!$ für alle $n \geq 4$ gilt.

   Den Induktionsanfang bei $n = 4$ haben wir bereits nachgerechnet.

   Induktionsschritt: Angenommen, die Ungleichung $2^n < n!$ gilt für ein gewisses $n \geq 4$. Wir zeigen die Ungleichung für $n+1$. Es gilt

   $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{I.A.}}{<} 2 \cdot n! \overset{n \geq 4}{\leq} n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

   Das beendet den Induktionsschritt. □

5. Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ werden durch die Rekursion $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$ $(n \geq 1)$ definiert. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

   $$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

   Lösung. Es sei $B(n)$ die Aussageform "$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$". Für $n = 0$ steht auf der linken Seite eine Summe mit nur einem Summanden f_0, der den Wert 0 hat. Auf der rechten Seite steht $f_2 - 1$, was ebenfalls 0 ist, da $f_2 = f_0 + f_1 = 1$ gilt. Damit ist $B(0)$ wahr.

   Nun sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass $B(n)$ wahr ist. Es gilt

   $$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} + 1.$$

   Das zeigt $B(n+1)$ und beendet den Induktionsschritt. □