Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 9
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 9. Dezember 2019

1. (a) Schreiben Sie die Gleichung

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

mit Hilfe des Summenzeichens.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Gleichung aus (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Relation $3|(n^3 - n)$ zutrifft (3 teilt $n^3 - n$).

3. Wahr oder falsch?

(a) $\sum_{k=1}^{\ell} k = \sum_{\ell=1}^{k} \ell$

(b) $\sum_{i=1}^{7} 5 = 35$

(c) $\sum_{j=1}^{4} j = 12$

(d) $\sum_{\ell=1}^{0} \ell = 0$

B: Hausaufgaben zum 16. Dezember 2019

1. Beweisen Sie, unter Benutzung der Peano-Axiome, dass für alle $a, m \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) $1 + m = m + 1$

(b) $a + m = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge m = 0$

2. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt (geometrische Summenformel):

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

3. . Sei $h \in \mathbb{R}$. Es gelte $h \geq -1$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ gilt (Bernoullische Ungleichung).

4. Mit $n!$ (gelesen „n Fakultät“) bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ der ersten n natürlichen Zahlen. Finden Sie heraus, für welche natürlichen Zahlen die Ungleichung $2^n < n!$ gilt und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

5. Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ werden durch die Rekursion $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$ $(n \geq 1)$ definiert. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$