Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 8
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 2. Dezember 2019

1. Wir betrachten die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen, in der man die Zahlen $1,\dots,n$ aufschreiben kann. Wie lauten die Folgenglieder a_1, a_2, a_3? Wie ergibt sich a_{n+1} aus a_n? Kann man eine allgemeine Formel für a_n angeben?

   Lösung. Es gilt $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 3$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Schreibt man die Zahlen $1,\dots,n+1$ in irgendeiner Reihenfolge hin, so erhält man durch Entfernen von $n+1$ eine Reihenfolge der Zahlen $1,\dots,n$. Gegeben eine Reihenfolge der Zahlen $1,\dots,n$ erhalten wir eine Reihenfolge der Zahlen $1,\dots,n+1$, indem wir $n+1$ in einer von $n+1$ möglichen Positionen einfügen. Damit gilt $a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n$. Allgemein gilt $a_n = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Wahr oder falsch?

   (a) Es gibt mehr ganze Zahlen als natürliche.
   (b) Es gibt mehr reelle Zahlen als rationale.
   (c) Cantors Argumente zeigen, dass es eine reelle Zahl gibt, die nicht rational ist.
   (d) Für jede Menge A gibt es eine Menge B, so dass es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, aber keine bijektive.

   Lösung. (a) Nein. (b) Ja. (c) Ja. (d) Ja, $B = \mathrm{Pot}(A)$.

B: Hausaufgaben zum 9. Dezember 2019

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Geben Sie eine möglichst einfache Bijektion zwischen $[0,1]$ und $[a,b]$ an. Begründen Sie, warum die Abbildung eine Bijektion ist.

   Lösung. Die Abbildung
   $$f : [0,1] \to [a,b]; x \mapsto a + (b-a)x$$
   tut es. Der Graph der Funktion ist eine Gerade mit der Steigung $b-a$. Es ist klar, dass $f(0) = a$ und $f(1) = b$ gilt. Alle Zahlen $x \in (0,1)$ werden auf Funktionswerte $f(x) \in (a,b)$ abgebildet. Es gilt $y = a + (b-a)x$ genau dann, wenn $y - a = (b-a)x$ gilt. Division durch $b-a$ liefert $x = \frac{y-a}{b-a}$. Werte von y im Intervall $[a,b]$ liefern Werte für x im Intervall $[0,1]$. Damit ist $f^{-1} : [a,b] \to [0,1]; x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$ die Umkehrfunktion von f. Das zeigt, dass f eine Bijektion ist.

2. Geben Sie eine Bijektion zwischen $(-1,1)$ und $\mathbb{R}$ an.

   Lösung. Die Abbildung
   $$f : (-1,1) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$$
   tut es. Der Ausdruck $\frac{x}{x^2-1}$ lässt sich als $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$ schreiben. In dieser Schreibung sieht man, wie der Graph von f aussieht. Die Funktion ist bijektiv. Eine genaue Begründung ist hier schwierig, da wichtige Methoden wie zum Beispiel der Zwischenwertsatz noch nicht zur Verfügung stehen. Man kann auch eine Umkehrfunktion angeben, das ist aber nicht so einfach.

3. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die wie folgt definiert ist: $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie a_2, a_3 und a_4. Was fällt auf? Was passiert, wenn man 2 als Startwert a_1 einsetzt?

   Lösung. Mit dem Startwert $a_1 = 1$ gilt $a_2 = 2.5$, $a_3 = 2.05$ und $a_4 = 2.0006$ (gerundet). Es sieht aus, als würden sich die Werte der Zahl 2 annähern. Startet man mit dem Wert $a_1 = 2$, so haben alle folgenden Folgenglieder den Wert 2.

4. Beweisen sie, dass die Relation $|A| = |B|$ zwischen Mengen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. (Hinweis: Die Notation $|A| = |B|$ bedeutet für uns zunächst nicht, dass zwei Werte, die wir A und B zuordnen, gleich sind. $|A| = |B|$ heißt, dass es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.)

   Lösung. Für jede Menge A ist $\mathrm{id}_A : A \to A$ eine Bijektion. Das zeigt $|A| = |A|$. Damit ist die Relation reflexiv.

   Gelte nun $|A| = |B|$ für zwei Mengen A und B. Damit existiert eine Bijektion $f : A \to B$. Die Funktion $f^{-1} : B \to A$ ist ebenfalls eine Bijektion und damit gilt auch $|B| = |A|$. Das zeigt die Symmetrie.

   Schließlich seien A, B und C Mengen mit $|A| = |B|$ und $|B| = |C|$. Dann gibt es Bijektionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Die Funktion $g \circ f : A \to C$ ist dann ebenfalls eine Bijektion, die $|A| = |C|$ zeigt. Damit ist die Relation transitiv.

5. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Folgen natürlicher Zahlen gibt.

   Lösung. Wir schreiben $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ für die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen. Angenommen, es gibt nur abzählbar viele Folgen natürlicher Zahlen. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ eine Bijektion und sei $(a_n^m)_{n\in\mathbb{N}} = f(m)$. Wir definieren eine Folge (a_n) natürlicher Zahlen, die nicht im Bild von f liegt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = a_n^n + 1$.

   Dann unterscheidet sich die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im n-ten Folgenglied von der Folge $f(n)$. Das zeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht im Bild von f liegt, ein Widerspruch zu der Annahme, dass f bijektiv ist.