Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 8

Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 2. Dezember 2019

1. Wir betrachten die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen, in der man die Zahlen $1, \dots, n$ aufschreiben kann. Wie lauten die Folgenglieder a_1, a_2, a_3? Wie ergibt sich a_{n+1} aus a_n? Kann man eine allgemeine Formel für a_n angeben?

2. Wahr oder falsch?

   (a) Es gibt mehr ganze Zahlen als natürliche.

   (b) Es gibt mehr reelle Zahlen als rationale.

   (c) Cantors Argumente zeigen, dass es eine reelle Zahl gibt, die nicht rational ist.

   (d) Für jede Menge A gibt es eine Menge B, so dass es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, aber keine bijektive.

B: Hausaufgaben zum 9. Dezember 2019

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Geben Sie eine möglichst einfache Bijektion zwischen $[0, 1]$ und $[a, b]$ an. Begründen Sie, warum die Abbildung eine Bijektion ist.

2. Geben Sie eine Bijektion zwischen $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$ an.

3. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die wie folgt definiert ist: $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie a_2, a_3 und a_4. Was fällt auf? Was passiert, wenn man 2 als Startwert a_1 einsetzt?

4. Beweisen sie, dass die Relation $|A| = |B|$ zwischen Mengen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. (Hinweis: Die Notation $|A| = |B|$ bedeutet für uns zunächst nicht, dass zwei Werte, die wir A und B zuordnen, gleich sind. $|A| = |B|$ heißt, dass es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.)

5. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Folgen natürlicher Zahlen gibt.