Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 7
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 25. November 2019

1. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; x \mapsto x^2 + 1$. Bestimmen Sie $f^{-1}[\{1, \dots, 20\}]$, also die Menge $\overleftarrow{f}(\{1, \dots, 20\})$.

   Lösung. Wir suchen diejenigen ganzen Zahlen x mit $f(x) \in \{1, \dots, 20\}$. Ist $|x| \geq 5$, so gilt $x^2 \geq 25$ und damit $f(x) \geq 26$. Ist $|x| \leq 4$, so ist $x^2 \leq 16$ und damit $f(x) \leq 17$. Der kleinste Wert von f wird an der Stelle 0 erreicht und es gilt $f(0) = 1$. Damit $f^{-1}[\{1, \dots, 20\}] = \{-4, -3, \dots, 4\}$.

2. Finden Sie zwei Abbildungen $f, g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ mit $f \circ g \neq g \circ f$.

   Lösung. Es sei $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ die Abbildung, die 0 und 1 vertauscht, $g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ die Abbildung, die 0 und 1 beide auf 0 abbildet.

3. Geben Sie eine Injektive Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an.

   Lösung. Für alle $x \in \mathbb{Z}$ sei
   $$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ -2x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$
   Es ist klar, dass f auf den Mengen $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$ jeweils injektiv ist. Außerdem hat f auf A nur ungerade Werte und auf B nur gerade Werte. Damit ist f injektiv.

B: Hausaufgaben zum 2. Dezember 2019

1. Finden Sie zwei Bijektionen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $f \circ g \neq g \circ f$. (4 Punkte)

   Lösung. Sei $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = f(3)$, $g(1) = 1$, $g(2) = 3$ and $g(3) = 2$. Dann gilt $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2$ und $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 3$.

2. Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die wie folgt definiert sind:
   $$f(x) = x(x-1)(x-3), \qquad g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{falls } x < 0 \\ x + 1, & \text{falls } \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{falls } x < 0 \\ -x + 3, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$
   (a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen und bestimmen Sie an Hand der Graphen, welche der Funktionen injektiv und welche surjektiv sind. (3 Punkte)

   (b) Beweisen Sie von einer der drei Funktionen, dass sie nicht surjektiv ist, und beweisen Sie von einer der drei Funktionen, dass sie nicht injektiv ist. (2 Punkte)

   Lösung. (a) Die Funktion f ist surjektiv, aber nicht injektiv. Die Funktion g ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Funktion h ist weder injektiv noch surjektiv.

   (b) Dass f nicht injektiv ist, folgt sofort daraus, dass $f(0) = 0 = f(1)$ gilt. g ist nicht surjektiv, weil es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $g(x) = 0$ ist. Ist $x < 0$, so gilt nämlich $g(x) = x - 1 < -1$. Ist

$x \geq 0$, so gilt $g(x) = x + 1 \geq 1$. Die Funktion h ist nicht surjektiv. Ist nämlich $x < 0$, so gilt $h(x) = 2x + 1 < 1$. Ist $x \geq 0$, so gilt $h(x) = -x + 3 \leq 3$. Damit gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = 4$. Wegen $h(-0.5) = 0 = h(3)$ ist h nicht injektiv.

3. . Seien A, B und C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen.

   (a) Zeigen Sie, dass mit $g \circ f : A \to C$ auch f injektiv ist. (2 Punkte)

   (b) Zeigen Sie weiter, dass mit $g \circ f$ auch g surjektiv ist. (2 Punkte)

   (c) Kann es passieren, dass $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht? (2 Punkte)

   (d) Kann es passieren, dass $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht? (2 Punkte)

   Begründen sie die Antworten auf die Fragen.

   Lösung. Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann gibt es $x, y \in A$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Es giilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$. Damit ist $g \circ f$ nicht injektiv.

   Nur nehmen wir an, dass $g \circ f : A \to C$ surjektiv ist. Sei $y \in C$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = y$. Insbesondere gilt $g(f(x)) = y$. $f(x)$ ist also ein Urbild von y unter g. Das zeigt, dass g surjektiv ist.

   Sei $A = C = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Weiter sei $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ sowie $g(1) = 1$, $g(2) = 2$ und $g(3) = 2$. Dann ist $g \circ f$ die Identität auf A und damit injektiv, während g nicht injektiv ist. Dasselbe Beispiel zeigt, dass $g \circ f$ durchaus surjektiv sein kann, ohne dass f surjektiv ist.

4. Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$f(x) = 2x - 6 \text{ und } g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{falls } x < 1 \\ 3x, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} sowie $g \circ g$. (3 Punkte)

   Lösung. Es gilt $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3$ und

$$g(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{falls } x < 3 \\ \frac{1}{3}x, & \text{falls } x \geq 3. \end{cases}$$

   Weiter ist

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{falls } x < -1 \\ 3x + 6, & \text{falls } -1 \leq x < 1 \\ 9x, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$