



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 7
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 25. November 2019

1. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto x^2 + 1$. Bestimmen Sie $f^{-1}[\{1, \dots, 20\}]$, also die Menge $\overleftarrow{f}(\{1, \dots, 20\})$.
2. Finden Sie zwei Abbildungen $f, g : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $f \circ g \neq g \circ f$.
3. Geben Sie eine Injektive Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ an.

B: Hausaufgaben zum 2. Dezember 2019

1. Finden Sie zwei Bijektionen $f, g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $f \circ g \neq g \circ f$. (4 Punkte)
2. Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die wie folgt definiert sind:

$$f(x) = x(x-1)(x-3), \quad g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x < 0 \\ x+1, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{falls } x < 0 \\ -x+3, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen und bestimmen Sie an Hand der Graphen, welche der Funktionen injektiv und welche surjektiv sind. (3 Punkte)
 - (b) Beweisen Sie von einer der drei Funktionen, dass sie nicht surjektiv ist, und beweisen Sie von einer der drei Funktionen, dass sie nicht injektiv ist. (2 Punkte)
3. Seien A, B und C Mengen und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen.
 - (a) Zeigen Sie, dass mit $g \circ f : A \rightarrow C$ auch f injektiv ist. (2 Punkte)
 - (b) Zeigen Sie weiter, dass mit $g \circ f$ auch g surjektiv ist. (2 Punkte)
 - (c) Kann es passieren, dass $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht? (2 Punkte)
 - (d) Kann es passieren, dass $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht? (2 Punkte)

Begründen sie jeweils die Antworten.

4. Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$f(x) = 2x - 6 \text{ und } g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{falls } x < 1 \\ 3x, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} sowie $g \circ g$. (3 Punkte)