Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 6

Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 18. November 2019

1. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Hat die Menge M ein Maximum oder Minimum?

Lösung. Wir schreiben $\frac{n+1}{n}$ als $1+\frac{1}{n}$ und sehen sofort, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 < 1+\frac{1}{n}$ gilt. Damit ist 1 eine untere Schranke von M. 1 ist aber auch die größte untere Schranke, also das Infimum von M. Sei nämlich $a \in \mathbb{R}$ mit $1 < a$. Dann ist $a - 1 > 0$. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < a - 1$ gilt. Für dieses n ist $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < a$. Also ist a keine untere Schranke von M. Das Infimum 1 ist aber nicht Element der Menge M, da $1 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in M$ echt größer als 1 ist. Also hat M kein Minimum.

Sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, so gilt $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$. Es folgt, dass das größte Element der Menge M die Zahl $1 + \frac{1}{1} = 2$ ist. Damit ist 2 sowohl das Supremum von M als auch das Maximum.

2. Es sei

$$P = \{(\overline{2}x + \overline{1}, x^2) : x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5.$$

Bestimmen Sie die Elemente von P. Skizzieren Sie P in geeigneter Weise. Prüfen Sie, ob P eine Abbildung ist. Falls P eine Abbildung ist, was sind Definitionsbereich und Wertevorrat?

Lösung. Wir setzen für x nacheinander die Werte $\overline{0}, \ldots, \overline{4}$ ein und erhalten die Elemente $(\overline{1}, \overline{0})$, $(\overline{3}, \overline{1})$, $(\overline{0}, \overline{4})$, $(\overline{2}, \overline{4})$ und $(\overline{4}, \overline{3})$ von P. Jedes Element von $\mathbb{Z}_5$ tritt genau einmal als erste Komponente in einem dieser Paare auf. Damit ist P tatsächlich eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{Z}_5$. Den Wertevorrat können wir der Einfachheit halber auch mit $\mathbb{Z}_5$ angeben, obwohl die $\overline{2}$ gar nicht im Bild von P liegt.

3. Wahr oder falsch?

   (a) Ist die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so ist auch die Menge $-A = \{-a : a \in A\}$ beschränkt.

   (b) Jede untere Schranke von $A \subseteq \mathbb{R}$ ist obere Schranke von $-A$.

   (c) $\sqrt{4} = \pm 2$

Lösung. a) Ja. b) Nein. Beispiel: $A = \{0\}$ hat die untere Schranke -1, die aber keine obere Schranke von $-A = \{0\}$ ist. c) Nein. Es gilt nur $\sqrt{4} = 2$. Die Quadratwurzel von 4 ist definiert als die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 4$.

B: Hausaufgaben zum 25. November 2019

1. a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Hat die Menge ein Maximum oder Minimum?

b) Führen Sie dieselben Betrachtungen wie in a) für die Menge

$$B = \left\{ \frac{1}{x^2} : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1 \right\}$$

durch.

Lösung. a) Für jede natürliche Zahl n ist $0 < \frac{1}{n^2}$. Also ist 0 eine untere Schranke von A, die aber nicht in A selber liegt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n^2$ und damit $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Da $\frac{1}{n}$ aber beliebig nahe an Null herankommt, gilt dasselbe für $\frac{1}{n^2}$. Das zeigt $\inf(A) = 0$.

Mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ werden die Werte von $\frac{1}{n^2}$ immer kleiner. Das zeigt, dass $\frac{1}{1^2} = 1$ das größte Element von A, und damit auch das Supremum von A ist. A hat also das Maximum 1 und kein Minimum.

b) Mit einer ähnlichen Betrachtung wie in A sieht man, dass B das Infimum 0 und das Supremum und Maximum 1 hat, aber kein Minimum.

2. Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 2x + \frac{1}{4}$ definiert sind.

Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem. Ermitteln Sie graphisch die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) < g(x)$. Berechnen Sie diese Lösungsmenge mittels quadratischer Ergänzung.

Lösung. Wir suchen zunächst diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$, also mit

$$x^2 - 1 = 2x + \frac{1}{4}$$

oder äquivalent

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert

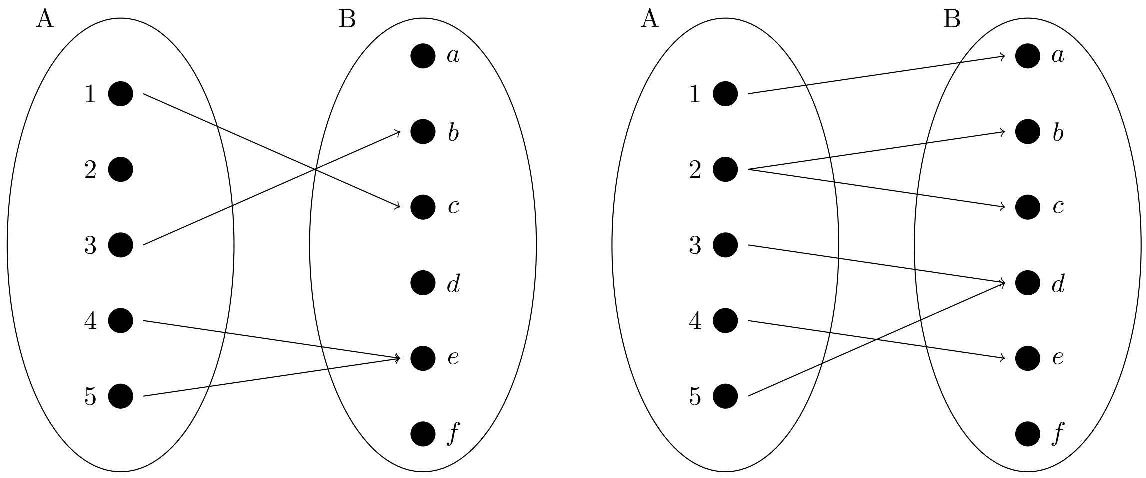
$$x^2 - 2x + 1 - \frac{9}{4} = 0,$$

also

$$(x-1)^2 = \frac{9}{4}.$$

Wurzelziehen liefert $x - 1 = \pm\frac{3}{2}$, also $x_{1,2} = 1 \pm \frac{3}{2}$. Es ist klar, dass der Graph von f eine nach oben geöffnete Parabel ist und g eine Gerade. Damit gilt $f(x) < g(x)$ auf dem offenen Intervall $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

3. Für die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ betrachten wir die folgenden Pfeildiagramme:



(a) Stellen diese Diagramme Funktionen von A nach B dar? Was muss gegebenenfalls geändert werden, damit Funktionen von A nach B dargestellt werden?

(b) Was muss geändert werden, damit injektive Funktionen dargestellt werden?

(c) Kann man die Pfeile so abändern, dass surjektive Funktionen dargestellt werden?

(d) Von der Funktion $g : A \to B$ sei bekannt, dass $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = d$ und $g(5) = f$ gelten. Wie kann $g(4)$ gewählt werden, damit g injektiv wird?

Lösung. (a) Beide Diagramme stellen keine Funktionen dar. Im linken Diagramm wird $2 \in A$ kein Element zugeordnet. Ein Pfeil von 2 auf irgendein Element von B würde dieses Problem lösen. Im rechten Diagramm werden der 2 zwei verschiedene Werte zugeordnet. Einer der beiden Pfeile müsste gelöscht werden.

(b) Damit injektive Funktionen dargestellt werden, müsste im linken Diagramm von der zwei ein Pfeil auf ein Element von B zeigen, das noch nicht getroffen wird, zum Beispiel auf a. Von den beiden Pfeilen, die auf e zeigen, müsste mindestens einer so abgeändert werden, dass er auf ein Element von B zeigt, das noch nicht getroffen wurde, zu Beispiel auf f. Im rechten Diagramm muss einer der beiden Pfeile, die auf d zeigen, so geändert werden, dass er auf ein Element zeigt, das noch nicht getroffen wurde, zum Beispiel auf f. Außerdem muss wieder einer der beiden, die von der zwei ausgehen, gelöscht werden.

(c) Da B mehr Elemente als A hat, gibt es keine surjektive Abbildung von A auf B.

(d) Damit g injektiv wird, muss $g(4)$ von $g(1), g(2), g(3), g(5)$ verschieden gewählt werden. $g(4) = c$ leistet das.

4. $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Wir definieren drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Es sei $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 5$ und $h(x) = x + 2$.

   (a) Beweisen Sie:

   i. f ist nicht injektiv.

   ii. g ist injektiv.

   iii. g ist nicht surjektiv.

   iv. h ist surjektiv.

   (b) Ist eine der Funktionen bijektiv? Ist eine der Funktionen weder injektiv noch surjektiv?

Lösung. (a) i. Es gilt $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$. Damit ist f nicht injektiv.

ii. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $g(x) = g(y)$. Dann ist $2x + 5 = 2y + 5$. Zieht man auf beiden Seiten dieser Gleichung 5 ab, so erhält man $2x = 2y$. Teilen durch 2 liefert $x = y$. Aus $g(x) = g(y)$ folgt also $x = y$. Damit ist die Funktion g injektiv.

iii. Für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $2x$ gerade und damit $2x + 5$ ungerade. Also gibt es zum Beispiel kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $g(x) = 2$. Das zeigt, dass g nicht surjektiv ist.

iv. Sei $y \in \mathbb{Z}$. Wir suchen ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $h(x) = y$. Für x soll also die Gleichung $x + 2 = y$ gelten. Subtrahieren von 2 liefert $x = y - 2$. Setzt man also $x = y - 2$, so ergibt sich $h(x) = x + 2 = (y - 2) + 2 = y$. Es gibt also ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $h(x) = y$. Da das für jedes $y \in \mathbb{Z}$ gilt, ist h surjektiv.

(b) Wir wissen schon, dass f und g nicht bijektiv sind. h ist zumindest surjektiv. Wir zeigen, dass h auch injektiv ist. Gelte nämlich $h(x) = h(y)$ für gewisse $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann ist $x + 2 = y + 2$. Abziehen von 2 auf beiden Seiten liefert $x = y$. Die Gleichung $h(x) = h(y)$ gilt also nur dann, wenn $x = y$ ist. Also ist h injektiv und damit auch surjektiv.

Unter f, g, h bleibt f der einzige Kandidat für eine Funktion, die weder injektiv noch surjektiv ist. Quadrate ganzer Zahlen sind aber immer positiv. Also gibt es kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -1$. Damit ist f nicht surjektiv. Dass f auch nicht injektiv ist, hatten wir schon gesehen.

5. Untersuchen Sie die folgenden vier Mengen darauf, ob sie Abbildungen sind. Fertigen Sie geeignete Skizzen an.

   (a) $E = \{(x, 4x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$
   (b) $F = \{(4x - 1, x) : x \in \mathbb{R}\}$
   (c) $G = \{(x, \overline{4}x + \overline{1}) : x \in \mathbb{Z}_6\}$
   (d) $H = \{(\overline{4}x + \overline{1}, x) : x \in \mathbb{Z}_6\}$

   Lösung. E ist eine Funktion, nämlich die mit der Definition $E(x) = 4x - 1$. F ist ebenso eine Funktion, nämlich die Umkehrfunktion von E mit der Definition $F(x) = \frac{x+1}{4}$. G ist auch eine Funktion, nämlich die Funktion von $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_6$ mit der Definition $G(x) = \overline{4}x + \overline{1}$. H ist keine Funktion, da sowohl für $x = \overline{0}$ als auch für $x = \overline{3}$ der Term $\overline{4}x + \overline{1}$ den Wert $\overline{1}$ hat. Damit liegen die Paare $(\overline{1}, \overline{0})$ und $(\overline{1}, \overline{3})$ beide in H. Der $\overline{1}$ wird also nicht ein eindeutiges Element von $\mathbb{Z}_6$ zugeordnet.