Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 6
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 18. November 2019

1. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Hat die Menge M ein Maximum oder Minimum?

2. Es sei

$$P = \{(\overline{2}x + \overline{1}, x^2) : x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5.$$

Bestimmen Sie die Elemente von P. Skizzieren Sie P in geeigneter Weise. Prüfen Sie, ob P eine Abbildung ist. Falls P eine Abbildung ist, was sind Definitionsbereich und Wertevorrat?

3. Wahr oder falsch?

(a) Ist die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so ist auch die Menge $-A = \{-a : a \in A\}$ beschränkt.

(b) Jede untere Schranke von $A \subseteq \mathbb{R}$ ist obere Schranke von $-A$.

(c) $\sqrt{4} = \pm 2$

B: Hausaufgaben zum 25. November 2019

1. a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Hat die Menge ein Maximum oder Minimum?

b) Führen Sie dieselben Betrachtungen wie in a) für die Menge

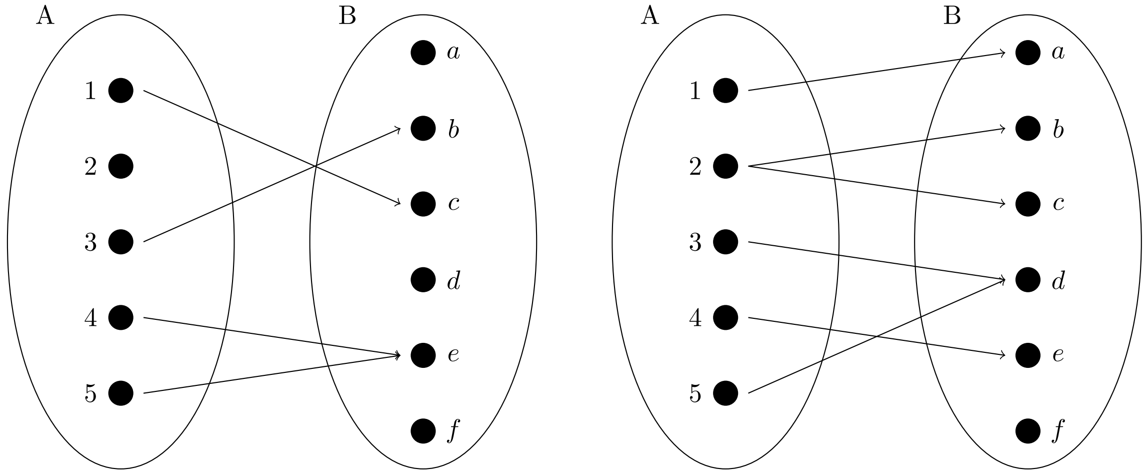
$$B = \left\{ \frac{1}{x^2} : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1 \right\}$$

durch.

2. Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 2x + \frac{1}{4}$ definiert sind.

Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem. Ermitteln Sie graphisch die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) < g(x)$. Berechnen Sie diese Lösungsmenge mittels quadratischer Ergänzung.

3. Für die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ betrachten wir die folgenden Pfeildiagramme:



   (a) Stellen diese Diagramme Funktionen von A nach B dar? Was muss gegebenenfalls geändert werden, damit Funktionen von A nach B dargestellt werden?

   (b) Was muss geändert werden, damit injektive Funktionen dargestellt werden?

   (c) Kann man die Pfeile so abändern, dass surjektive Funktionen dargestellt werden?

   (d) Von der Funktion $g : A \to B$ sei bekannt, dass $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = d$ und $g(5) = f$ gelten. Wie kann $g(4)$ gewählt werden, damit g injektiv wird?

4. $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Wir definieren drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Es sei $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 5$ und $h(x) = x + 2$.

   (a) Beweisen Sie:

      i. f ist nicht injektiv.

      ii. g ist injektiv.

      iii. g ist nicht surjektiv.

      iv. h ist surjektiv.

   (b) Ist eine der Funktionen bijektiv? Ist eine der Funktionen weder injektiv noch surjektiv?

5. Untersuchen Sie die folgenden vier Mengen darauf, ob sie Abbildungen sind. Fertigen Sie geeignete Skizzen an.

   (a) $E = \{(x, 4x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$

   (b) $F = \{(4x - 1, x) : x \in \mathbb{R}\}$

   (c) $G = \{(x, \overline{4}x + \overline{1}) : x \in \mathbb{Z}_6\}$

   (d) $H = \{(\overline{4}x + \overline{1}, x) : x \in \mathbb{Z}_6\}$