Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Grundlagen der Mathematik im Wintersemester 2019/2020, Blatt 5
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 11. November 2019

1. Bestimmen Sie mittels *quadratischer Ergänzung* die Lösungen der Gleichung $x^2-4x-5=0$. Leiten Sie daraus eine Produktdarstellung des Polynoms x^2-4x-5 ab und begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen als die gefundenen geben kann.

   Lösung. Wir schreiben $x^2-4x-5=x^2-4x+4-9=(x-2)^2-9$. Damit löst x die Gleichung $x^2-4x-5=0$ genau dann, wenn $(x-2)^2=9$ gilt, wenn also $x-2=\pm 3$ ist. Es ergeben sich die zwei Lösungen $x_1=5$ und $x_2=-1$.

   Damit lässt sich das Polynom x^2-4x-5 auch als $(x+1)(x-5)$ schreiben. Das Produkt $(x-5)(x+1)$ ist genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist. Damit sind $x_1=5$ und $x_2=-1$ die einzigen Nullstellen des Polynoms.

2. Lösen Sie die Gleichung $\overline{3}\cdot x+\overline{3}=\overline{0}$ in $\mathbb{Z}_5$.

   Lösung. Eine Möglichkeit ist, einfach alle Elemente von $\mathbb{Z}_5$ auszuprobieren. Etwas systematischer können wir die Gleichung durch Äquivalenzumformungen zu $\overline{3}\cdot x=-\overline{3}=\overline{2}$ und schließlich zu $x=\overline{3}^{-1}\cdot\overline{2}$ umformen. Es ergibt sich $x=\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{4}$.

3. Schreiben Sie die Mengen

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x-2}\leq x-\frac{1}{2}\right\}\qquad\text{und}\qquad B=\{x\in\mathbb{R}:|4x-1|\leq 2x+5\}$$

   in Intervall-Schreibweise.

   Lösung.

$$A=[0,2)\cup\left[\frac{5}{2},\infty\right)\qquad\text{und}\qquad B=\left[-\frac{2}{3},3\right]$$

B: Hausaufgaben zum 18. November 2019

1. Wir haben inzwischen gezeigt, dass für alle $m\in\mathbb{Z}$ die Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}_m$ durch $[a]_m+[b]_m=[a+b]_m$ und $[a]_m\cdot[b]_m=[a\cdot b]_m$ wohldefiniert sind.

   Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ein Körper ist. (4 Punkte)

   (Hinweis: Wir wissen aus der Hausaufgabe 1 zum 11.11. bereits, dass die Kommutativ- und Assoziativgesetze sowie das Distributivgesetz erfüllt sind.)

   Lösung. Wir müssen nur noch zeigen, dass alle Elemente von $\mathbb{Z}_5\setminus\{\overline{0}\}$ invertierbar sind. Die Inversen von $\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{4}$ lauten $\overline{1},\overline{3},\overline{2},\overline{4}$.

2. Leiten Sie die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $x^2+px+q=0$ her und diskutieren Sie die Lösbarkeit der Gleichung in Abhängigkeit von p und q.

   (Hinweis: Quadratische Ergänzung.) (4 Punkte)

Lösung. Es gilt

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Damit gilt $x^2 + px + q = 0$ genau dann, wenn $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist. Es ergibt sich

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und damit

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

3. Schreiben Sie die folgenden Mengen in Intervall-Schreibweise:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-x}{x-1} \geq x - 2\right\} \qquad \text{und} \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 > x - 2\right\}$$

(4 Punkte)

Lösung.

$$A = (-\infty, 1) \qquad \text{und} \qquad B = (-1, 1) \cup (2, \infty)$$

4. Schreiben Sie die folgende Menge in Intervall-Schreibweise:

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{|x+5|} < \frac{1}{x-2}\right\}$$

(8 Punkte)

Lösung. Zunächst stellen wir fest, dass der Bruch $\frac{x}{|x+5|}$ nicht definiert ist, wenn $x = -5$ ist. In diesem Falle gilt die Ungleichung auch nicht. Ebenso ist der Bruch $\frac{1}{x-2}$ nicht definiert, wenn $x = 2$ ist. Damit sind -5 und 2 nicht Elemente der Menge C.

Ist $x \neq -5$, so ist $|x+5| > 0$ und wir können die Ungleichung mit $|x+5|$ multiplizieren ohne die Gültigkeit zu verändern. In diesem Fall ist die Ungleichung also äquivalent zu

$$x < \frac{|x+5|}{x-2}.$$

Wir würden diese Ungleichung gerne mit $x - 2$ multiplizieren, müssen hier aber die Fälle $x - 2 < 0$ und $x - 2 > 0$ unterscheiden. Im folgenden nehmen wir $x \neq 2$ und $x \neq -5$ an.

Fall 1. $x - 2 < 0$, also $x < 2$. In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $x(x-2) > |x+5|$, also zu $x^2 - 2x > |x+5|$.

Unterfall 1. $x+5 > 0$, also $x > -5$. In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $x^2-2x > x+5$, also zu $x^2 - 3x - 5 > 0$. Die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 3x - 5$ sind $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 5} = \frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$. Zwischen den Nullstellen hat das Polynom negative Werte, außerhalb positive. $\sqrt{29}$ liegt zwischen 5 und 6. Damit gilt $-5 < \frac{3-\sqrt{29}}{2} < 2 < \frac{3+\sqrt{29}}{2}$. In Fall 1, Unterfall 1 betrachten wir nur x-Werte in dem Intervall $(-5, 2)$. Unter diesen liegen nur die Zahlen in $\left(-5, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)$ außerhalb der Nullstellen von $x^2 - 3x - 5$.

Unterfall 2. $x + 5 < 0$, also $x < -5$. In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $x^2 - 2x > -(x+5)$, also zu $x^2 - x + 5 > 0$. Das Polynom $x^2 - x + 5$ hat aber keine reellen Nullstellen, wie man leicht sieht, wenn man die p-q-Formel anwendet. Für große Werte von x ist $x^2 - x + 5$ positiv. Also gilt $x^2 - x + 5 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In Fall 1, Unterfall 2 betrachten wir aber nur Zahlen in dem Intervall $(-5, 2)$. Diese liegen alle in C.

Fall 2. $x - 2 > 0$, also $x > 2$. In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $x(x-2) < |x+5|$, also zu $x^2 - 2x < |x+5|$.

Man beachte, dass in diesem Fall insbesondere $x + 5 > 0$ gilt. Damit ist $|x+5| = x+5$ und die Ungleichung äquivalent zu $x^2 - 2x < x + 5$, also zu $x^2 - 3x - 5 < 0$. Wir haben schon die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 3x - 5$ berechnet. Zwischen diesen Nullstellen hat das Polynom Werte < 0. Im Fall 2 betrachten wir nur reelle Zahlen $x > 2$. Davon liegen genau die Elemente von $\left(2, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$ zwischen den Nullstellen des Polynoms.

Insgesamt ergibt sich

$$C = (-\infty, -5) \cup \left(-5, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right).$$